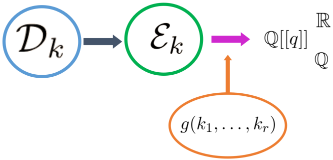
多重ゼータ値の q 類似および
形式的な二重アイゼンシュタイン空間の実現

ヘンリク　バッハマン

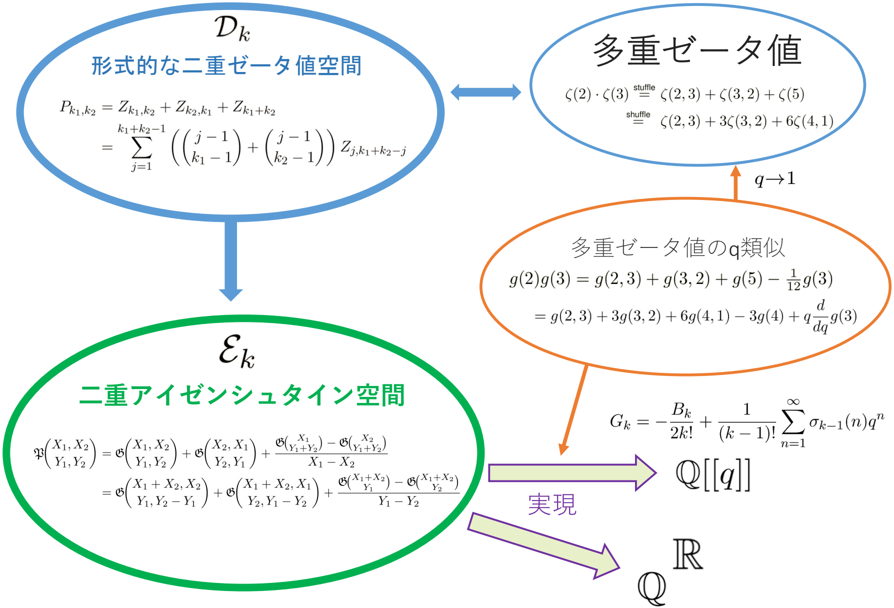
名古屋大学

U. Kühn
N. Matthes
共同研究



解析数論セミナー, 2021 年 7 月 30 日

www.henrikbachmann.com


$\mathcal{D}_k$
形式的な二重ゼータ値空間
$P_{k_1,k_2} = Z_{k_1,k_2} + Z_{k_2,k_1} + Z_{k_1+k_2}$
$= \sum_{j=1}^{k_1+k_2-1} \left(\binom{j-1}{k_1-1} + \binom{j-1}{k_2-1} \right) Z_{j,k_1+k_2-j}$
多重ゼータ値
$\zeta(2)\cdot\zeta(3) \overset{\text{stuffle}}{=} \zeta(2,3)+\zeta(3,2)+\zeta(5)$
$\overset{\text{shuffle}}{=} \zeta(2,3)+3\zeta(3,2)+6\zeta(4,1)$
$q \to 1$
多重ゼータ値のq類似
$g(2)g(3) = g(2,3)+g(3,2)+g(5)-\frac{1}{12}g(3)$
$= g(2,3)+3g(3,2)+6g(4,1)-3g(4)+q\frac{d}{dq}g(3)$
$\mathcal{E}_k$
二重アイゼンシュタイン空間
$\mathfrak{P}\binom{X_1,X_2}{Y_1,Y_2} = \mathfrak{G}\binom{X_1,X_2}{Y_1,Y_2} + \mathfrak{G}\binom{X_2,X_1}{Y_2,Y_1} + \frac{\mathfrak{G}\binom{X_1}{Y_1+Y_2} - \mathfrak{G}\binom{X_2}{Y_1+Y_2}}{X_1-X_2}$
$= \mathfrak{G}\binom{X_1+X_2,X_2}{Y_1,Y_2-Y_1} + \mathfrak{G}\binom{X_1+X_2,X_1}{Y_2,Y_1-Y_2} + \frac{\mathfrak{G}\binom{X_1+X_2}{Y_1} - \mathfrak{G}\binom{X_1+X_2}{Y_2}}{Y_1-Y_2}$
$G_k = -\frac{B_k}{2k!} + \frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n$
$\mathbb{Q}[[q]]$
実現
$\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$

① 多重ゼータ値 - 定義

定義

自然数の組 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し、**多重ゼータ値**を

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \ldots, k_r) = \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}$$

で定義する。ただし、収束のため $k_1 \geq 2$ とする。

- **深さ**: r, **重さ**: $k_1 + \cdots + k_r$。
- 多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}$ で表す。

注意：$\mathcal{Z}$ は $\mathbb{Q}$ 代数となる。

事実：多重ゼータ値はたくさんの関係式を満たす。

例

$$\zeta(3) = \zeta(2, 1).$$

① 多重ゼータ値 - 複シャッフル関係式

2 つの多重ゼータ値の積を書くには 2 つの方法がある。

調和積 (級数表示を使用する)
深さ 2 の例 $(k_1, k_2 \geq 2)$

$$\begin{aligned}\zeta(k_1)\cdot\zeta(k_2) &= \sum_{m>0}\frac{1}{m^{k_1}}\sum_{n>0}\frac{1}{n^{k_2}}\\ &= \sum_{m>n>0}\frac{1}{m^{k_1}n^{k_2}} + \sum_{n>m>0}\frac{1}{m^{k_1}n^{k_2}} + \sum_{m=n>0}\frac{1}{m^{k_1+k_2}}\\ &= \zeta(k_1,k_2)+\zeta(k_2,k_1)+\zeta(k_1+k_2)\,.\end{aligned}$$

シャッフル積 (多重積分を使用する)
深さ 2 の例 $(k_1, k_2 \geq 2)$

$$\zeta(k_1)\cdot\zeta(k_2) = \sum_{j=2}^{k_1+k_2-1}\left(\binom{j-1}{k_1-1}+\binom{j-1}{k_2-1}\right)\zeta(j, k_1+k_2-j)\,.$$

① 多重ゼータ値 - 複シャッフル関係式

これらの 2 つの式は、複シャッフル関係式と呼ばれるさまざまな関係式を示す。

例

$$\zeta(2)\cdot\zeta(3) \overset{\text{調和}}{=} \zeta(2,3)+\zeta(3,2)+\zeta(5)$$

$$\overset{\text{シャッフル}}{=} \zeta(2,3)+3\zeta(3,2)+6\zeta(4,1)\,.$$

$$\Longrightarrow 2\zeta(3,2)+6\zeta(4,1) \overset{\text{複シャッフル}}{=} \zeta(5)\,.$$

ただし、複数のゼータ値の間にはさらに多くの関係式がある。例：

$$\sum_{m>n>0}\frac{1}{m^2n} = \zeta(2,1) = \zeta(3) = \sum_{m>0}\frac{1}{m^3}.$$

$\rightsquigarrow$ **一般複シャッフル関係式.**

定義 (Gangl・金子・Zagier)

$k \geq 1$ に対し、 **重さ k の形式的な二重ゼータ値の空間** を

$$\mathcal{D}_k = \left\langle Z_k, Z_{k_1,k_2}, P_{k_1,k_2} \mid k_1 + k_2 = k, k_1, k_2 \geq 1 \right\rangle_{\mathbb{Q}} \Big/ (\clubsuit)$$

で定義する。ここで商は、 $k_1, k_2 \geq 1$ に渡る次の関係式でとる：

$$\begin{aligned} P_{k_1,k_2} &= Z_{k_1,k_2} + Z_{k_2,k_1} + Z_{k_1+k_2} \\ &= \sum_{j=1}^{k_1+k_2-1} \left(\binom{j-1}{k_1-1} + \binom{j-1}{k_2-1} \right) Z_{j,k_1+k_2-j} \,. \end{aligned} \qquad (\clubsuit)$$

① 多重ゼータ値 - 形式的な二重ゼータ値の空間の実現

A を $\mathbb{Q}$ ベクトル空間とする。

定義

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}_k, A)$ の要素は**重さ k の二重ゼータ空間の A での実現**と呼ばれる。

例 $A = \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}$ の場合 $k \geq 1$、$k_1, k_2 \geq 1$、 $k_1 + k_2 = k$ に対し、次のは $\mathcal{D}_k$ の実現

$$Z_k \longmapsto \begin{cases} \zeta(k) & k \geq 3 \\ 0 & k = 1, 2 \end{cases},$$

$$Z_{k_1,k_2} \longmapsto \begin{cases} \zeta(k_1, k_2) & k_1 \geq 2 \\ -\zeta(k_2, 1) - \zeta(k_2 + 1) & k_1 = 1, k_2 \geq 2 \\ 0 & k_1 = k_2 = 1 \end{cases},$$

$$P_{k_1,k_2} \longmapsto \begin{cases} \zeta(k_1)\zeta(k_2) & k_1, k_2 \neq 1 \\ 0 & k_1 = 1 \vee k_2 = 1 \end{cases}.$$

① 多重ゼータ値 - 形式的な二重ゼータ値の空間の実現

リーマンゼータ値はアイゼンシュタイン級数の定数項 $(k \geq 2)$

$$G_k(\tau) = \zeta(k) + \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n) q^n \,.$$

(ここで $q = e^{2\pi i \tau}$, $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$.)

質問

1. $Z_k \mapsto G_k$ で $\mathcal{D}_k$ の実現は存在するか？
2. $P_{k_1,k_2} \mapsto G_{k_1} G_{k_2}$ を満たしているか？

定理 (Gangl・金子・Zagier の答えは「Jein・はい, ほとんど・yes, almost」)

$Z_k \mapsto G_k$ と

$$P_{k_1,k_2} \longmapsto G_{k_1} G_{k_2} + \frac{\delta_{k_1,2}}{2k_2} G'_{k_2} + \frac{\delta_{k_2,2}}{2k_1} G'_{k_1}$$

を使用した $\mathcal{D}_k$ の実現が存在する。

② 多重ゼータ値の q 類似 - 変形 q 類似

定義

複素数 $c \in \mathbb{C}$ の**重さ** k **の変形** q **類似**とは、q 級数 $f \in \mathbb{C}[[q]]$ であって、次を満たすものをいう

$$\lim_{q \to 1} (1-q)^k f = c\,.$$

定理

重さ k のモジュラー形式 $f(\tau) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n q^n$ に対し、f は $(2\pi i)^k a_0$ の重さ k の変形 q 類似。

証明: f が重さ k のモジュラーである場合、$f(-\frac{1}{\tau}) = \tau^k f(\tau)$、つまり

$$\lim_{q \to 1} (1-q)^k f(q) = \lim_{\tau \to 0} ((2\pi i \tau)^k + O(\tau^{k+1})) f(\tau) = \lim_{\tau \to 0} (2\pi i)^k f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \lim_{\tau \to i\infty} (2\pi i)^k f(\tau) = (2\pi i)^k a_0\,.$$

② 多重ゼータ値の q 類似 - 変形 q 類似

特に正規化されたアイゼンシュタイン級数

$$\widetilde{G}_k(\tau) := \frac{1}{(2\pi i)^k} G_k(\tau) = -\frac{B_k}{2k!} + \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n) q^n \in \mathbb{Q}[[q]]$$

は偶数 $k \geq 4$ に対して $\zeta(k)$ の変形 q 類似（重さ k）。しかし、$k \geq 2$ の場合は

$$\lim_{q \to 1} (1-q)^k \underbrace{\frac{1}{(k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n) q^n}_{g(k)} = \zeta(k) \, .$$

以下では、$g(k) = \sum_{\substack{m>0 \\ n>0}} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} q^{mn}$ の拡張をいくつか紹介する。

② 多重ゼータ値の q 類似 - 変形 q 類似

定義

$k_1, \dots k_r \geq 1$ に対し、 q-級数 $g(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Q}[[q]]$ を次のように定義する

$$g(k_1, \dots, k_r) = \sum_{\substack{m_1 > \cdots > m_r > 0 \\ n_1, \dots, n_r > 0}} \frac{n_1^{k_1 - 1}}{(k_1 - 1)!} \cdots \frac{n_r^{k_r - 1}}{(k_r - 1)!} q^{m_1 n_1 + \cdots + m_r n_r} .$$

定理

$k_1 \geq 2,\ k_2, \dots, k_r \geq 1$ に対し、 $g(k_1, \dots, k_r)$ は $\zeta(k_1, \dots, k_r)$ の変形 q 類似。

証明: まず、 次のように書き直す：

$$g(k_1, \dots, k_r) = \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{P_{k_1}(q^{m_1})}{(1 - q^{m_1})^{k_1}} \cdots \frac{P_{k_r}(q^{m_r})}{(1 - q^{m_r})^{k_r}} .$$

ここで、多項式 P_k は $\frac{P_k(X)}{(1-X)^k} := \sum_{n>0} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} X^n$ と定義される。これは $P_k(1) = 1$ を満たす。よって、

$$\lim_{q \to 1} (1 - q)^{k_1 + \cdots + k_r} g(k_1, \dots, k_r) = \lim_{q \to 1} \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \prod_{j=1}^{r} \left(\frac{1 - q}{1 - q^{m_j}} \right)^{k_j} P_{k_j}(q^{m_j}) = \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{m_j^{k_j}} .$$

② 多重ゼータ値の q 類似 - 調和積

定理

$k_1, k_2 \geq 1$ に対して

$$g(k_1)g(k_2) = g(k_1, k_2) + g(k_2, k_1) + g(k_1 + k_2) + \sum_{j=1}^{k_1+k_2-1} \left(\lambda^j_{k_1,k_2} + \lambda^j_{k_2,k_1} \right) g(j)$$

である。ただしここで、 $\lambda^j_{k_1,k_2}$ は

$$\lambda^j_{k_1,k_2} = (-1)^{k_2-1} \binom{k_1 + k_2 - 1 - j}{k_1 - j} \frac{B_{k_1+k_2-j}}{(k_1 + k_2 - j)!} .$$

証明: 証明には母関数 $L_m(X) = \sum_{k\geq 1} \frac{P_k(q^m)}{(1-q^m)^k} X^k = \frac{e^X q^m}{1-e^X q^m}$ を使用する。特に、次に証明する

$$L_m(X)L_m(Y) = \frac{1}{e^{X-Y} - 1} L_m(X) + \frac{1}{e^{Y-X} - 1} L_m(Y),$$

と $\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{e^x-1}$ を使う。

② 多重ゼータ値の q 類似 - 調和積

定理

$k_1, k_2 \geq 1$ に対して

$$g(k_1)g(k_2) = g(k_1,k_2) + g(k_2,k_1) + g(k_1+k_2) + \sum_{j=1}^{k_1+k_2-1} \left(\lambda^j_{k_1,k_2} + \lambda^j_{k_2,k_1} \right) g(j)\,.$$

例 $g(2)g(3) = g(2,3) + g(3,2) + g(5) - \frac{1}{12} g(3)$.

- これは、より小さい重さの項があることを除いて、多重ゼータ値の公式と同じ式。

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5)\,.$$

- シャッフル積に似た積公式もある？

② 多重ゼータ値の q 類似 - 微分

シャッフル積について考察する前に,g の定義を拡張する。このために、微分作用素 $q\frac{d}{dq}$ に着目する。($q=e^{2\pi i\tau}$ のとき $q\frac{d}{dq}=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}$)

$$q\frac{d}{dq}g_k(q)=q\frac{d}{dq}\sum_{\substack{m>0\\n>0}}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}q^{mn}=\sum_{\substack{m>0\\n>0}}\frac{mn^k}{(k-1)!}q^{mn}.$$

この作用素は、分子にも m を作り出すことがわかる。これを d 回続けると、次のようになる。

$$\left(q\frac{d}{dq}\right)^d g_k(q)=\sum_{\substack{m>0\\n>0}}\frac{m^d n^{k+d-1}}{(k-1)!}q^{mn}.$$

これにより、より一般的な方法で g を定義できる。

② 多重ゼータ値の q 類似 - 定義

定義

$k_1, \ldots k_r \geq 1, d_1, \ldots, d_r \geq 0$ に対し、

$$g\binom{k_1, \ldots, k_r}{d_1, \ldots, d_r} = \sum_{\substack{m_1 > \cdots > m_r > 0 \\ n_1, \ldots, n_r > 0}} \frac{m_1^{d_1} n_1^{k_1 - 1}}{(k_1 - 1)!} \cdots \frac{m_r^{d_r} n_r^{k_r - 1}}{(k_r - 1)!} q^{m_1 n_1 + \cdots + m_r n_r}.$$

重さ： $k_1 + \cdots + k_r + d_1 + \cdots + d_r$、 **深さ：** r.

前のスライドと同様にして：

$$q\frac{d}{dq} g\binom{k_1, \ldots, k_r}{d_1, \ldots, d_r} = \sum_{j=1}^{r} k_j g\binom{k_1, \ldots .k_j + 1, \ldots, k_r}{d_1, \ldots, d_j + 1, \ldots, d_r}.$$

彼らの積はどうよう？

調和積は一般化が容易。

定理

$k_1, k_2 \geq 1, d_1, d_2 \geq 0$ に対し

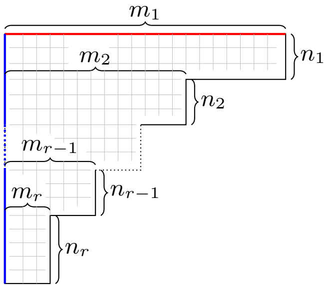
$$g\binom{k_1}{d_1} g\binom{k_2}{d_2} = g\binom{k_1, k_2}{d_1, d_2} + g\binom{k_2, k_1}{d_2, d_1} + g\binom{k_1 + k_2}{d_1 + d_2} + \sum_{j=1}^{k_1+k_2-1} \left(\lambda^j_{k_1,k_2} + \lambda^j_{k_2,k_1}\right) g\binom{j}{d_1 + d_2}.$$

- この調和積の公式は、シャッフル積を書き下すために重要になる。
- このために、最初に g の間の線形関係の族を紹介する。

② 多重ゼータ値の q 類似 - 分割 および若い図形 翻訳冗談

$$g\begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ d_1, \dots, d_r \end{pmatrix} = \sum_{\substack{m_1 > \dots > m_r > 0 \\ n_1, \dots, n_r > 0}} \underbrace{\frac{m_1^{d_1} n_1^{k_1 - 1}}{(k_1 - 1)!} \cdots \frac{m_r^{d_r} n_r^{k_r - 1}}{(k_r - 1)!}}_{f(\lambda)} q^{m_1 n_1 + \dots + m_r n_r} = \sum_{N > 0} \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Part}_r(N)} f(\lambda) \right) q^N .$$

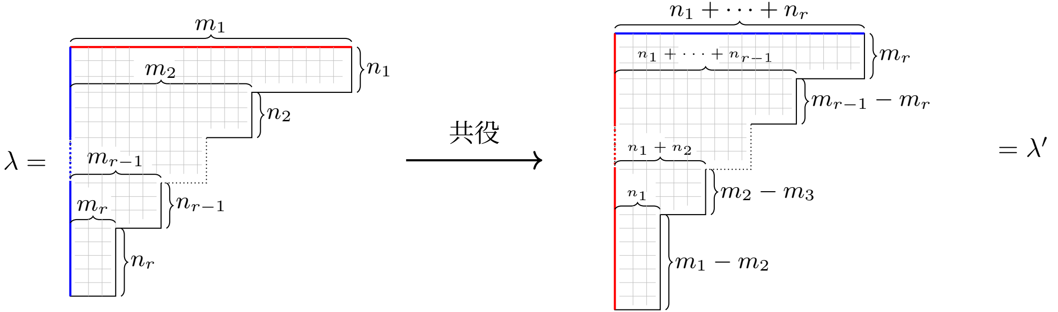
$\mathrm{Part}_r(N)$: N の r 部分への分割の集合。
任意の r 部分への分割 $\lambda \in \mathrm{Part}_r(N)$ はヤング図形で表すことができる。

$\lambda =$ 

ここで $N = m_1 n_1 + \dots + m_r n_r$ かつ $m_1 > \dots > m_r > 0$, $n_1, \dots, n_r > 0$.

② 多重ゼータ値の q 類似 - 共役な分割

$\mathrm{Part}_r(N)$ には、ヤング図形の共役 $\lambda \mapsto \lambda'$ によって与えられる対合がある。



q^N の係数では $\mathrm{Part}_r(N)$ の要素すべてに渡る和をとっているため、g の次の線形関係が得られる。

$$g\begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_r \\ d_1, \ldots, d_r \end{pmatrix} = \sum_{N>0} \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Part}_r(N)} f(\lambda) \right) q^N = \sum_{N>0} \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Part}_r(N)} f(\lambda') \right) q^N = \sum * \, g\begin{pmatrix} *, \ldots, * \\ *, \ldots, * \end{pmatrix}.$$

例 深さ 1 では、共役は $m \leftrightarrow n$ の交換であり、$k \geq 1, d \geq 0$ に対して

$$g\binom{k}{d} = \sum_{\substack{m>0\\n>0}} \frac{m^d n^{k-1}}{(k-1)!} q^{mn} = \frac{d!}{(k-1)!} \sum_{\substack{m>0\\n>0}} \frac{m^d n^{k-1}}{d!} q^{mn} = \frac{d!}{(k-1)!} g\binom{d+1}{k-1}.$$

深さ 2 では、共役が $m_1 \to n_1 + n_2$ と $m_2 \to n_1$ によって与えられる。

$$\begin{aligned}
g\binom{1,1}{1,2} &= \sum_{\substack{m_1>m_2>0\\n_1>n_2>0}} m_1 m_2^2\, q^{m_1 n_1 + m_2 n_2} = \sum_{\substack{m_1>m_2>0\\n_1>n_2>0}} (n_1+n_2) n_1^2\, q^{m_1 n_1 + m_2 n_2} \\
&= 6 \sum_{\substack{m_1>m_2>0\\n_1>n_2>0}} \frac{n_1^3}{6}\, q^{m_1 n_1 + m_2 n_2} + 2 \sum_{\substack{m_1>m_2>0\\n_1>n_2>0}} \frac{n_1^2 n_2}{2}\, q^{m_1 n_1 + m_2 n_2} \\
&= 6g\binom{4,1}{0,0} + 2g\binom{3,2}{0,0}.
\end{aligned}$$

② 多重ゼータ値の q 類似 - シャッフル積の例

調和積と共役を組み合わせると、積を表現する別の方法が得られる。

$$
\begin{aligned}
g(2)g(3) &= g\binom{2}{0}g\binom{3}{0} = \frac{1}{2}g\binom{1}{1}g\binom{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(g\binom{1,1}{1,2} + g\binom{1,1}{2,1} + g\binom{2}{3} - g\binom{1}{3}\right) \\
&= g\binom{2,3}{0,0} + 3g\binom{3,2}{0,0} + 6g\binom{4,1}{0,0} + 3g\binom{4}{1} - 3g\binom{4}{0}.
\end{aligned}
$$

$q\frac{d}{dq}g\binom{3}{0} = 3g\binom{4}{1}$ を使うと

$$
g(2)g(3) = g(2,3) + 3g(3,2) + 6g(4,1) - 3g(4) + q\frac{d}{dq}g(3).
$$

これは多重ゼータ値のシャッフル積に似ている

$$
\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1).
$$

② 多重ゼータ値の q 類似 - シャッフル積

定理

$k_1, k_2 \geq 1$ と $k = k_1 + k_2$ に対し

$$g(k_1)g(k_2) = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\binom{j-1}{k_1-1} + \binom{j-1}{k_2-1} \right) g(j, k-j)$$
$$+ \binom{k-2}{k_1-1} \left(q \frac{d}{dq} \frac{g(k-2)}{k-2} - g(k-1) \right) + \delta_{k_1,1}\delta_{k_2,1} g(2)\,,$$

ここで $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1\,, & i = j \\ 0\,, & i \neq j \end{cases}$ はクロネッカーのデルタ。

一般に、$g\binom{k_1}{d_1} g\binom{k_2}{d_2}$ に対しても公式が得られる。

② 多重ゼータ値の q 類似 - 複シャッフル関係式

より小さい重さ部分のモジュロを取ると、積は次のようになる

定理

$k_1, k_2 \geq 1, d_1, d_2 \geq 0$ に対し

$$
\begin{aligned}
g\binom{k_1}{d_1} g\binom{k_2}{d_2} &\equiv g\binom{k_1, k_2}{d_1, d_2} + g\binom{k_2, k_1}{d_2, d_1} + g\binom{k_1 + k_2}{d_1 + d_2} \\
&\equiv \sum_{\substack{l_1 + l_2 = k_1 + k_2 \\ e_1 + e_2 = d_1 + d_2}} \left(\binom{l_1 - 1}{k_1 - 1} \binom{d_1}{e_1} (-1)^{d_1 - e_1} + \binom{l_1 - 1}{k_2 - 1} \binom{d_2}{e_1} (-1)^{d_2 - e_1} \right) g\binom{l_1, l_2}{e_1, e_2} \\
&\quad + \frac{d_1! d_2!}{(d_1 + d_2 + 1)!} \binom{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - 1} g\binom{k_1 + k_2 - 1}{d_1 + d_2 + 1}.
\end{aligned}
$$

ここで、$k_1 + k_2 + d_1 + d_2$ より小さい重さのモジュロを取っている。

定義

$K \geq 1$ に対し、重さ K の**形式的な二重アイゼンシュタイン空間** を

$$\mathcal{E}_K = \left\langle G\binom{k}{d}, G\binom{k_1, k_2}{d_1, d_2}, P\binom{k_1, k_2}{d_1, d_2} \;\middle|\; {\scriptstyle k+d=k_1+k_2+d_1+d_2=K \atop k,k_1,k_2\geq 1,\, d,d_1,d_2\geq 0} \right\rangle_{\mathbb{Q}} \Big/ (\spadesuit)$$

で定義する。ここで商は、次の関係式によってとった：

$$\begin{aligned} P\binom{k_1, k_2}{d_1, d_2} &= G\binom{k_1, k_2}{d_1, d_2} + G\binom{k_2, k_1}{d_2, d_1} + G\binom{k_1 + k_2}{d_1 + d_2} \\ &= \sum_{\substack{l_1+l_2=k_1+k_2 \\ e_1+e_2=d_1+d_2}} \left(\binom{l_1 - 1}{k_1 - 1}\binom{d_1}{e_1}(-1)^{d_1-e_1} + \binom{l_1 - 1}{k_2 - 1}\binom{d_2}{e_1}(-1)^{d_2-e_1}\right) G\binom{l_1, l_2}{e_1, e_2} \\ &+ \frac{d_1!d_2!}{(d_1 + d_2 + 1)!}\binom{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - 1} G\binom{k_1 + k_2 - 1}{d_1 + d_2 + 1}. \end{aligned} \qquad (\spadesuit)$$

③ 二重アイゼンシュタイン空間 - 実現

A を $\mathbb{Q}$-ベクトル空間とする。

定義

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}_k, A)$ の要素は**重さ k の形式的な二重アイゼンシュタイン空間の A での実現**と呼ばれる。

- 次のスライドで見るように、$\mathcal{D}_k \to \mathcal{E}_k$ という埋め込みがあるので、 $\mathcal{E}_k$ を実現するたびに、$\mathcal{D}_k$ が実現される。
- 以下

$$G\binom{k}{0} \longmapsto G_k$$
$$P\binom{k_1, k_2}{0, 0} \longmapsto G_{k_1} G_{k_2}$$

を満足させる実現を構成する。

③ 二重アイゼンシュタイン空間 - 定義

$\mathcal{E}_k$ は、次のように埋め込まれているため、$\mathcal{D}_k$ の一般化と見なすことができる。

定理

すべての $k \geq 1$ について、以下は $\mathbb{Q}$-線形写像 $\mathcal{D}_k \to \mathcal{E}_k$ を与える。

$$\begin{aligned}
Z_k &\longmapsto G\binom{k}{0} - \delta_{k,2} G\binom{2}{0}, \\
Z_{k_1,k_2} &\longmapsto G\binom{k_1,k_2}{0,0} + \frac{1}{2}\left(\delta_{k_2,1} G\binom{k_1}{1} - \delta_{k_1,1} G\binom{k_2}{1} + \delta_{k_1,2} G\binom{k_2+1}{1}\right), \\
P_{k_1,k_2} &\longmapsto P\binom{k_1,k_2}{0,0} + \frac{1}{2}\left(\delta_{k_1,2} G\binom{k_2+1}{1} + \delta_{k_2,2} G\binom{k_1+1}{1}\right) - \delta_{k_1 \cdot k_2,1} G\binom{2}{0}.
\end{aligned}$$

特に、$\mathcal{E}_k$ の実現が得られれば、$\mathcal{D}_k$ の実現も得られる。

③ 二重アイゼンシュタイン空間 - 母関数

関係式 (♠) は、以下の母関数を使用して、よりコンパクトな方法で書き換えることができる

$$\mathfrak{G}_1\binom{X_1}{Y_1} := \sum_{\substack{k_1\geq 1\\ d_1\geq 0}} G\binom{k_1}{d_1} X_1^{k_1-1}\frac{Y_1^{d_1}}{d_1!}, \qquad \mathfrak{G}_2\binom{X_1,X_2}{Y_1,Y_2} := \sum_{\substack{k_1,k_2\geq 1\\ d_1,d_2\geq 0}} G\binom{k_1,k_2}{d_1,d_2} X_1^{k_1-1}X_2^{k_2-1}\frac{Y_1^{d_1}}{d_1!}\frac{Y_2^{d_2}}{d_2!},$$

$$\mathfrak{P}\binom{X_1,X_2}{Y_1,Y_2} := \sum_{\substack{k_1,k_2\geq 1\\ d_1,d_2\geq 0}} P\binom{k_1,k_2}{d_1,d_2} X_1^{k_1-1}X_2^{k_2-1}\frac{Y_1^{d_1}}{d_1!}\frac{Y_2^{d_2}}{d_2!}.$$

(♠) は

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}\binom{X_1,X_2}{Y_1,Y_2} &= \mathfrak{G}_2\binom{X_1,X_2}{Y_1,Y_2} + \mathfrak{G}_2\binom{X_2,X_1}{Y_2,Y_1} + \frac{\mathfrak{G}_1\binom{X_1}{Y_1+Y_2} - \mathfrak{G}_1\binom{X_2}{Y_1+Y_2}}{X_1-X_2} \\ &= \mathfrak{G}_2\binom{X_1+X_2,X_2}{Y_1,Y_2-Y_1} + \mathfrak{G}_2\binom{X_1+X_2,X_1}{Y_2,Y_1-Y_2} + \frac{\mathfrak{G}_1\binom{X_1+X_2}{Y_1} - \mathfrak{G}_1\binom{X_1+X_2}{Y_2}}{Y_1-Y_2}.\end{aligned} \qquad (♠)$$

になる。

③ 二重アイゼンシュタイン空間 - 群作用

定義

群環 $\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})]$ の形式的ローラン級数 $\mathcal{L} = \mathbb{Q}((X_1, X_2, Y_1, Y_2))$ に対する作用を、$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ および $R \in \mathcal{L}$ に対して次のように定義する

$$R_{|\gamma}\begin{pmatrix} X_1, X_2 \\ Y_1, Y_2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} aX_1 + bX_2, cX_1 + dX_2 \\ \det(\gamma)(dY_1 - cY_2), \det(\gamma)(-bY_1 + aY_2) \end{pmatrix}$$

次に、それを $\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})]$ 内のすべての要素に線形に拡張する。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ では次の要素を使用する

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例

$$(\mathfrak{G}_2 |\, T(1+\epsilon))\begin{pmatrix} X_1, X_2 \\ Y_1, Y_2 \end{pmatrix} = \mathfrak{G}_2\begin{pmatrix} X_1 + X_2, X_2 \\ Y_1, Y_2 - Y_1 \end{pmatrix} + \mathfrak{G}_2\begin{pmatrix} X_1 + X_2, X_1 \\ Y_2, Y_1 - Y_2 \end{pmatrix}.$$

③ 二重アイゼンシュタイン空間 - 実現を見つける

群作用を使用すると、方程式 (♠) は

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{G}_2|(1+\epsilon) + R^* = \mathfrak{G}_2|\,T(1+\epsilon) + R^{⧢}\,, \qquad (♠)$$

になる。ここで

$$R^*\begin{pmatrix} X_1, X_2 \\ Y_1, Y_2 \end{pmatrix} = \frac{\mathfrak{G}_1\binom{X_1}{Y_1+Y_2} - \mathfrak{G}_1\binom{X_2}{Y_1+Y_2}}{X_1 - X_2}, \quad R^{⧢}\begin{pmatrix} X_1, X_2 \\ Y_1, Y_2 \end{pmatrix} = \frac{\mathfrak{G}_1\binom{X_1+X_2}{Y_1} - \mathfrak{G}_1\binom{X_1+X_2}{Y_2}}{Y_1 - Y_2}.$$

ベクトル空間 A 内のすべての k の $\mathcal{E}_k$ の実現を見つけるには、(♠) を満たす級数

$$\mathfrak{G}_1\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \mathfrak{G}_2\begin{pmatrix} X_1, X_2 \\ Y_1, Y_2 \end{pmatrix}, \mathfrak{P}\begin{pmatrix} X_1, X_2 \\ Y_1, Y_2 \end{pmatrix} \in A[[X_1, X_2, Y_1, Y_2]]\,,$$

を見つける必要がある。
(表記法を濫用して、生成する多項式に同じ名前を使用する。)

実現を見つけるための 2 つの戦略がある。

1. 定義式を別の式（フェイ恒等式）に書き直してから、この式を満たす級数を見つける。
2. 解を推測し、q 類似の代数的設定を使用して、この解が目的の方程式を満たしていることを証明する。

③ 二重アイゼンシュタイン空間 - フェイ恒等式

定理 (B.-Kühn-Matthes)

$$F\binom{X}{Y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}\right) + \mathfrak{G}_1\binom{X}{Y} \in A[[X_1,X_2,Y_1,Y_2]]$$

と $\mathfrak{G}_1\binom{-X_1}{-Y_1} = -\mathfrak{G}_1\binom{X_1}{Y_1}$ が

$$F\binom{X_1}{Y_1}F\binom{X_2}{Y_2} + F\binom{X_1-X_2}{-Y_2}F\binom{X_1}{Y_1+Y_2} + F\binom{-X_2}{-Y_1-Y_2}F\binom{X_1-X_2}{Y_1} = 0\,.$$

満たしていると仮定する。このとき

$$\mathfrak{G}_2 = \frac{1}{3}P|(1+T^{-1}) - \frac{1}{12}R^*|(5-3U+U\epsilon) - \frac{1}{12}R^{\sqcup}|(T^{-1}(5-3\epsilon+U))$$

と $\mathfrak{P}\binom{X_1,X_2}{Y_1,Y_2} = \mathfrak{G}_1\binom{X_1}{Y_1}\mathfrak{G}_1\binom{X_2}{Y_2}$ が (♠) を満たす:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{G}_2|(1+\epsilon) + R^* = \mathfrak{G}_2|\,T(1+\epsilon) + R^{\sqcup}\,.$$

③ 二重アイゼンシュタイン空間 - フェイ恒等式の例

例 フェイ恒等式を満たすローラン級数の例は、**双曲線コタンジェント**

$$C\binom{X}{Y} = -\frac{1}{4}\left(\coth\left(\frac{X}{2}\right) + \coth\left(\frac{Y}{2}\right)\right) =: -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}\right) + \beta\binom{X}{Y}.$$

と**クロネッカー関数**

$$\begin{aligned} K_q\binom{X}{Y} &= -\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-X-mY}q^m}{1-q^m e^{-X}} + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{Y+mX}q^m}{1-q^m e^{Y}} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}\right) + \sum_{\substack{r,s\geq 0 \\ r+s \text{ odd}}} \frac{|r-s|!}{r!}\left(q\frac{d}{dq}\right)^{\min\{r,s\}} \widetilde{G}_{|r-s|+1}(\tau)\, X^r \frac{Y^s}{s!}. \end{aligned}$$

注意： $C = K_0$.

これにより $G\binom{k}{0} \longmapsto \widetilde{G}_k$, $P\binom{k_1,k_2}{0,0} \longmapsto \widetilde{G}_{k_1}\widetilde{G}_{k_2}$ を満たすように、すべての k の $\mathcal{E}_k$ が実現される。
(ここで $\widetilde{G}_{奇数} = 0$)

③ 二重アイゼンシュタイン空間 - g の母関数

級数 g の母関数を

$$\mathfrak{g}\binom{X}{Y} = \sum_{\substack{k\geq 1\\ d\geq 0}} g\binom{k}{d} X^{k-1}\frac{Y^d}{d!}, \quad \mathfrak{g}\binom{X_1, X_2}{Y_1, Y_2} = \sum_{\substack{k_1,k_2\geq 1\\ d_1,d_2\geq 0}} g\binom{k_1, k_2}{d_1, d_2} X_1^{k_1-1}X_2^{k_2-1}\frac{Y_1^{d_1}}{d_1!}\frac{Y_2^{d_2}}{d_2!}.$$

で定義する。これにより、調和積の公式を

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}\binom{X_1}{Y_1}\mathfrak{g}\binom{X_2}{Y_2} &= \mathfrak{g}\binom{X_1, X_2}{Y_1, Y_2} + \mathfrak{g}\binom{X_2, X_1}{Y_2, Y_1} + \frac{1}{X_1 - X_2}\left(\mathfrak{g}\binom{X_1}{Y_1+Y_2} - \mathfrak{g}\binom{X_2}{Y_1+Y_2}\right)\\ &\quad + \left(\beta\binom{X_2 - X_1}{Y_1+Y_2} - \beta\binom{X_1 - X_2}{Y_1+Y_2}\right)\left(\mathfrak{g}\binom{X_1}{Y_1+Y_2} - \mathfrak{g}\binom{X_2}{Y_1+Y_2}\right)\\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\mathfrak{g}\binom{X_1}{Y_1+Y_2} + \mathfrak{g}\binom{X_2}{Y_1+Y_2}\right).\end{aligned}$$

と書くことができる。ここで、β は前のスライドの級数 C の非極性部分であり、本質的にベルヌーイ数の母関数である。

③ 二重アイゼンシュタイン空間 - 別の実現

定理 (B.-Kühn-Matthes)

べき級数

$$\mathfrak{G}_1\binom{X_1}{Y_1} = \beta\binom{X_1}{Y_1} + \mathfrak{g}\binom{X_1}{Y_1},$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_2\binom{X_1, X_2}{Y_1, Y_2} &= \beta\binom{X_1, X_2}{Y_1, Y_2} - \beta\binom{X_1 - X_2}{Y_2}\mathfrak{g}\binom{X_1}{Y_1 + Y_2} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}\binom{X_1}{Y_1 + Y_2} \\ &\quad + \beta\binom{X_2}{Y_2}\mathfrak{g}\binom{X_1}{Y_1} + \beta\binom{X_1 - X_2}{Y_1}\mathfrak{g}\binom{X_2}{Y_1 + Y_2} + \mathfrak{g}\binom{X_1, X_2}{Y_1, Y_2}\end{aligned}$$

と $\mathfrak{P}\binom{X_1,X_2}{Y_1,Y_2} = \mathfrak{G}_1\binom{X_1}{Y_1}\mathfrak{G}_1\binom{X_2}{Y_2}$ は (♠) を満たす：

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{G}_2|(1+\epsilon) + R^* = \mathfrak{G}_2|\,T(1+\epsilon) + R^{\sqcup\!\sqcup}\,.$$

ここで、β は、双曲線コタンジェントから得られた実現。

証明: g の代数的構造を使用する。

③ 二重アイゼンシュタイン空間 - 別の実現

前の定理は、

$$
\begin{aligned}
G\binom{k}{d} &\longmapsto \frac{(k-d-1)!}{(k-1)!}\left(q\frac{d}{dq}\right)^{d}\widetilde{G}_{k-d}, \qquad (k>d\geq 0)\\
P\binom{k_1,k_2}{0,0} &\longmapsto \widetilde{G}_{k_1}\widetilde{G}_{k_2}
\end{aligned}
$$

を満たすように、すべての k に対して $\mathcal{E}_k$ の実現を与えた。
クロネッカー関数からの実現とは対照的に、ここでは**奇数** $k\geq 1$ に対して

$$
\widetilde{G}_k(\tau)=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{n>0}\sigma_{k-1}(n)q^n=g(k)\,.
$$

がある。

③ 二重アイゼンシュタイン空間 - 応用

$\mathcal{E}_k$ では、いくつかの明示的な関係を証明できる。

定理

$k_1, k_2 \geq 1$ と偶数 $k = k_1 + k_2 \geq 4$ に対し

$$\frac{1}{2}\left(\binom{k_1+k_2}{k_2} - (-1)^{k_1}\right) G\binom{k}{0} = \sum_{\substack{j=2 \\ j\,\mathit{even}}}^{k-2} \left(\binom{k-j-1}{k_1-1} + \binom{k-j-1}{k_2-1} - \delta_{j,k_1}\right) P\binom{j, k-j}{0, 0}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\binom{k-3}{k_1-1} + \binom{k-3}{k_2-1} + \delta_{k_1,1} + \delta_{k_2,1}\right) G\binom{k-1}{1}.$$

前のスライドの実現を使うことで、アイゼンシュタイン級数の積の間の関係式を得ることができる。特に、例えば

$$G_8 = \frac{6}{7} G_4^2, \quad G_{10} = \frac{10}{11} G_4 G_6 .$$

③ 二重アイゼンシュタイン空間 - コメント

$\mathcal{E}_k$ には、今日は説明しなかった構造がある。

1. 線形写像

$$\delta : \mathcal{E}_k \longrightarrow \mathcal{E}_{k+2}$$
$$G\begin{pmatrix} k_1, k_2 \\ d_1, d_2 \end{pmatrix} \longmapsto k_1 G\begin{pmatrix} k_1+1, k_2 \\ d_1+1, d_2 \end{pmatrix} + k_2 G\begin{pmatrix} k_1, k_2+1 \\ d_1, d_2+1 \end{pmatrix}$$

   および $\delta : G\binom{k}{d} \mapsto kG\binom{k}{d}$ がある。これはある意味で演算子 $q\frac{d}{dq}$ に対応する。

2. 「定数項への射影」として解釈できる線形写像 $\pi : \mathcal{E}_k \to \mathcal{D}_k$ が存在する。

ご清聴ありがとうございました