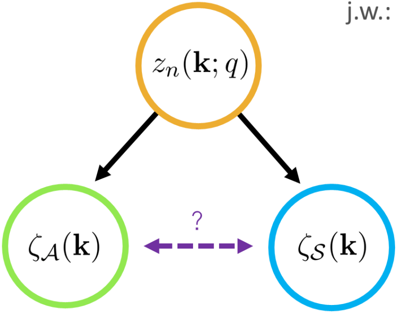
有限多重調和q級数の1のベキ根での値と有限および対称多重ゼータ値

ヘンリック　バッハマン

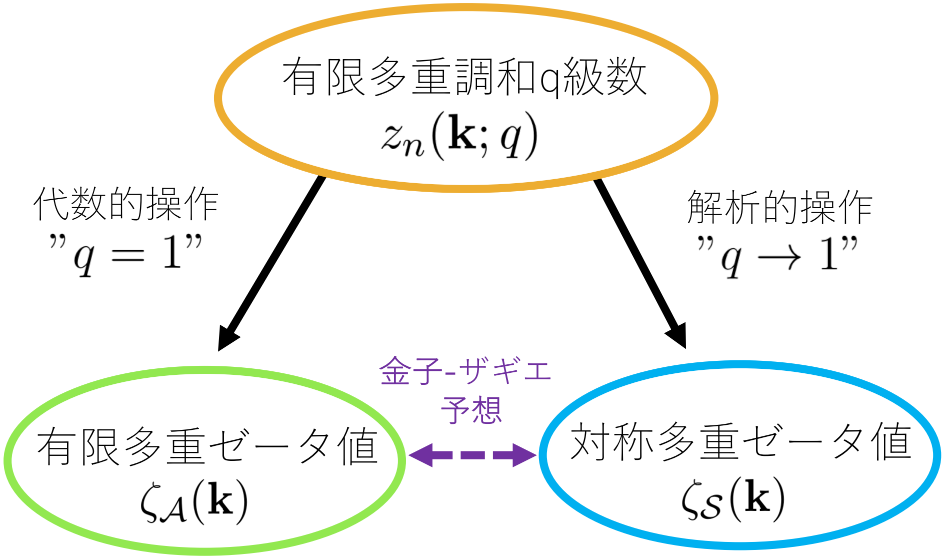
名古屋大学

j.w.: 竹山美宏
田坂浩二



日本数学会2019年度秋季総合分科会

www.henrikbachmann.com



有限多重調和q級数
$z_n(\mathbf{k};q)$
代数的操作
"$q=1$"
解析的操作
"$q\to 1$"
金子-ザギエ
予想
有限多重ゼータ値
$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$
対称多重ゼータ値
$\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$

多重ゼータ値

定義

自然数の組$\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$に対し、**多重ゼータ値**を

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k_1,\ldots,k_r)=\sum_{m_1>\cdots>m_r>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

で定義する。ただし、収束のため$k_1\geq 2$とする。

多重ゼータ値で生成される$\mathbb{Q}$ベクトル空間を$\mathcal{Z}$で表す。

注意：$\mathcal{Z}$は$\mathbb{Q}$代数となる。

事実：多重ゼータ値はたくさんの関係式を満たす。

例

$$\zeta(3)=\zeta(2,1).$$

対称多重ゼータ値

定義

自然数の組$\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$に対し、**対称多重ゼータ値**を

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})=\sum_{a=0}^{r}(-1)^{k_1+\cdots+k_a}\zeta^*(k_a,k_{a-1},\ldots,k_1)\zeta^*(k_{a+1},k_{a+2},\ldots,k_r)$$

の商空間$\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$における像として定める。
ここで、$\zeta^*(k_1,\ldots,k_r)$は$*$-正規化多重ゼータ値です。

例

対称多重ゼータ値もたくさんの関係式を満たす。例えば

$$2\zeta_{\mathcal{S}}(4,1)+\zeta_{\mathcal{S}}(3,2)=0\,.$$

有限多重ゼータ値

$$\mathcal{A} = \prod_{p:\mathrm{prime}} \mathbb{F}_p \Big/ \bigoplus_{p:\mathrm{prime}} \mathbb{F}_p$$

とする。

定義

自然数の組$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$に対し、有限多重ゼータ値を

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \left(\sum_{p > m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \mod p \right)_p \in \mathcal{A},$$

で定める。

例

有限多重ゼータ値もたくさんの関係式を満たす。例えば

$$2\zeta_{\mathcal{A}}(4,1) + \zeta_{\mathcal{A}}(3,2) = 0\,.$$

対称多重ゼータ値 vs 有限多重ゼータ値

$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$：有限多重ゼータ値で生成される$\mathbb{Q}$ベクトル空間。

予想 (金子-Zagier)

写像

$$\begin{aligned} \varphi_{KZ} : \mathcal{Z}_{\mathcal{A}} &\longrightarrow \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}, \\ \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) &\longmapsto \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) \mod \zeta(2)\mathcal{Z}. \end{aligned}$$

は$\mathbb{Q}$代数射としての同型写像になる。

定理 (安田 2014)

商空間$\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$は対称多重ゼータ値で生成される。

有限多重調和q級数・定義

定義

自然数nと自然数の組$\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$に対し

$$z_n(\mathbf{k};q)=z_n(k_1,\dots,k_r;q)=\sum_{n>m_1>\cdots>m_r>0}\frac{q^{(k_1-1)m_1}\dots q^{(k_r-1)m_r}}{[m_1]_q^{k_1}\cdots[m_r]_q^{k_r}}$$

と定義する。ただし、$[m]_q=\frac{1-q^m}{1-q}=1+q+\cdots+q^{m-1}$は$q$整数。

研究対象：$z_n(\mathbf{k};\zeta_n)$　ただし、$\zeta_n=e^{\frac{2\pi i}{n}}$は1の原始$n$乗根

有限多重調和q級数・対称多重ゼータ値

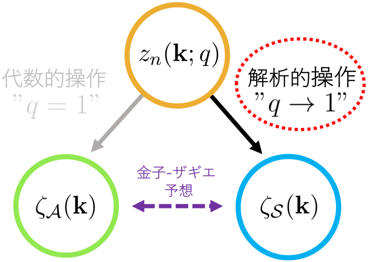
定理 (B.-竹山-田坂, 2018)

自然数の組$\mathbf{k}$に対し、極限

$$\xi(\mathbf{k}) = \lim_{n\to\infty} z_n(\mathbf{k}; e^{2\pi i/n})$$

は$\mathbb{C}$に存在する。その実部について、次が成り立つ：

$$\mathrm{Re}\,\xi(\mathbf{k}) \equiv \zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) \mod \zeta(2)\mathcal{Z}.$$



有限多重調和q級数 • 有限多重ゼータ値

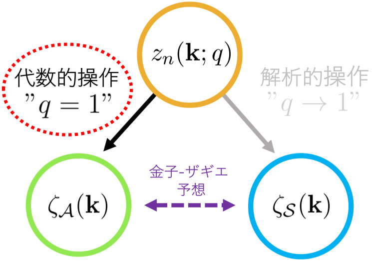
素数pについて、$z_p(\mathbf{k};\zeta_p) \in \mathbb{Z}[\zeta_p]$となることに注意。

定理 (B.-竹山-田坂, 2018)

自然数の組$\mathbf{k}$に対し、

$$(z_p(\mathbf{k};\zeta_p) \mod (1-\zeta_p))_p = \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$$

が成り立つ。



有限多重調和q級数 ・ 応用

主結果を使うと、$z_n(\mathbf{k};\zeta_n)$の関係式から有限および対称多重ゼータ値の関係式が得られる。

例

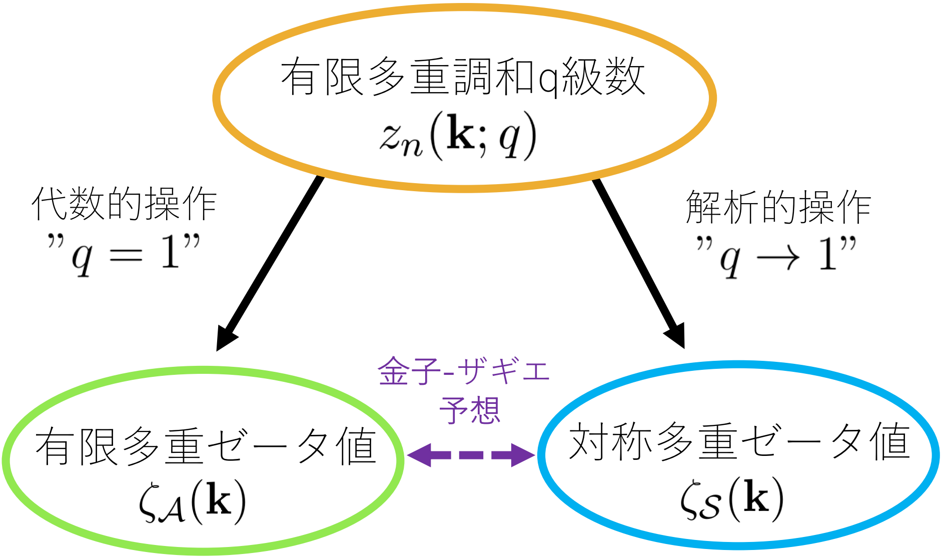
全ての自然数nに対し、

$$\begin{aligned} 2z_n(4,1;\zeta_n)+z_n(3,2;\zeta_n) &= \frac{(n-2)(n^2-1)(n^2+10n+1)}{1440}(1-\zeta_n)^5 \\ &\quad + \frac{n+2}{3}(1-\zeta_n)^2 z_n(2,1;\zeta_n) \end{aligned}$$

が成り立つ。 主結果より、次の関係式を得る：

$$\begin{aligned} 2\zeta_{\mathcal{A}}(4,1)+\zeta_{\mathcal{A}}(3,2) &= 0\,, \\ 2\zeta_{\mathcal{S}}(4,1)+\zeta_{\mathcal{S}}(3,2) &\equiv 0 \mod \zeta(2)\mathcal{Z}. \end{aligned}$$

ご清聴ありがとうございました



有限多重調和q級数・スター版

定義

自然数nと自然数の組$\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$に対し

$$z_n^\star(\mathbf{k};q)=z_n^\star(k_1,\dots,k_r;q)=\sum_{n>m_1\geq\cdots\geq m_r>0}\frac{q^{(k_1-1)m_1}\cdots q^{(k_r-1)m_r}}{[m_1]_q^{k_1}\cdots[m_r]_q^{k_r}},$$

と定義する。

注意：$z_n(\mathbf{k};\zeta_n)$で生成されるベクトル空間と$z_n^\star(\mathbf{k};\zeta_n)$で生成されるベクトル空間は等しい

注意：$\zeta_{\mathcal{A}}^\star(\mathbf{k}),\zeta_{\mathcal{S}}^\star(\mathbf{k})$もあり、主結果のスター版も成り立つ。

有限多重調和q級数 • 双対公式

定義 (rough)

自然数の組$\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$を

$$(k_1,\dots,k_r)=(\overbrace{1+\cdots+1}^{k_1},\dots,\overbrace{1+\cdots+1}^{k_r}).$$

と表したときに、**,** と **+** を入れ替えて得られる自然数の組を$\mathbf{k}^\vee$と書いて、ホフマン双対と呼ぶ。

例 $\mathbf{k}=(3,2)$のホフマン双対は次のようになります：

$$\mathbf{k}^\vee=(3,2)^\vee=(1+1+1,1+1)^\vee=(1,1,1+1,1)=(1,1,2,1).$$

定理 (B.-竹山-田坂, 2018)

自然数の組$\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$と1の原始$n$乗根$\zeta_n$に対し、

$$z_n^\star(\mathbf{k};\zeta_n)=(-1)^{k_1+\cdots+k_r+1}z_n^\star(\overline{\mathbf{k}^\vee};\zeta_n)$$

が成り立つ。ただし、$\overline{\mathbf{k}^\vee}$は$\mathbf{k}^\vee$を右から読み替えて得られる組みである。