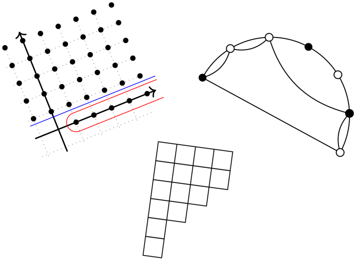
Multiple Eisensteinreihen und q-Analoga von Multiplen Zeta-Werten



Henrik Bachmann

16. Dezember 2015

Multiple Zeta-Werte (MZV)

Reelle Zahlen

Summe über geordnete Zahlen

Stuffle & Shuffle Produkte

Modulformen

Holomorphe Funktionen

Fourierentwicklung

Eisensteinreihen

Summe über Gitterpunkte

Multiple Zeta-Werte (MZV)

Reelle Zahlen

Summe über geordnete Zahlen

Stuffle & Shuffle Produkte

Modulformen

Holomorphe Funktionen

Fourierentwicklung

Eisensteinreihen

Summe über Gitterpunkte

Multiple Eisensteinreihen (MES)

Holomorphe Funktionen

Summe über geordnete Gitterpunkte

Fourierentwicklung mit MZV als konstanten Term

(einige) Stuffle & Shuffle Produkte

q-Analoga von Multiplen Zeta-Werten

q-Reihen mit rationalen Koeffizienten

Summe über Partitionen

Treten in der Fourierentwicklung von MES auf

Liefert MZV für $q \to 1$

"Stuffle" & "Shuffle" ähnliche Produkte

Multiple Zeta-Werte

Definition

Für $s_1 \geq 2, s_2, \ldots, s_l \geq 1$, definieren wir den **Multiplen Zeta-Wert** (MZV) durch

$$\zeta(s_1, \ldots, s_l) := \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_l > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \ldots n_l^{s_l}} \,.$$

Mit l bezeichnen wir seine Länge, mit $s_1 + \cdots + s_l$ das Gewicht und für den $\mathbb{Q}$-Vektorraum der durch alle MZV aufgespannt wird schreiben wir $\mathcal{MZ}$.

- Das Produkt von zwei MZV kann mit Hilfe der obigen Summendarstellung als Linearkombination von MZV geschrieben werden (**Stuffle Produkt**).
- MZV können zudem als iterierte Integrale geschrieben werden. Dies liefert eine zweite Möglichkeit (**Shuffle Produkt**) um das Produkt von zwei MZV als Linearkombination von MZV auszudrücken.
- Dies liefert eine Vielzahl von $\mathbb{Q}$-linearen Relationen (Doppel Shuffle Relationen) zwischen MZV. z.B.:

$$\zeta(2,3)+\zeta(3,2)+\zeta(5) \overset{\text{stuffle}}{=} \zeta(2)\cdot\zeta(3) \overset{\text{shuffle}}{=} \zeta(2,3)+3\zeta(3,2)+6\zeta(4,1)\,.$$

Eisensteinreihen & Teilersummen

Für gerade $k \geq 4$ sind die klassischen **Eisensteinreihen** definiert durch

$$G_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m\tau+n)^k} = \zeta(k) + \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n) q^n \,,$$

wobei $\tau \in \mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ und $q = e^{2\pi i\tau}$.

Die Koeffizienten σ_{k-1} sind dabei die **Teilersummen** gegeben durch

$$\frac{1}{(k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n) q^n = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n>0} \left(\sum_{d|n} d^{k-1} \right) q^n = \sum_{\substack{v>0 \\ u>0}} \frac{v^{k-1}}{(k-1)!} q^{u\cdot v} \,.$$

Im Folgenden betrachten wir "multiple"-Versionen von Eisensteinreihen, den Teilersummen und ihren Erzeugendenreihen.

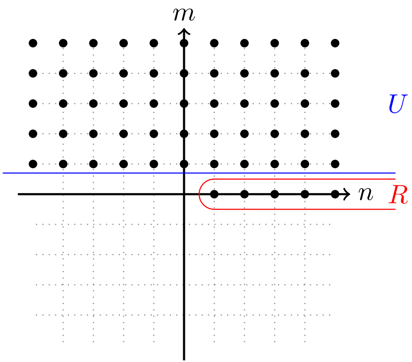
Eine Ordnung für Gitterpunkte

Auf dem Gitter $\Lambda_\tau = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ definieren wir für $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_\tau$ die Ordnung $\succ$ durch

$$\lambda_1 \succ \lambda_2 :\Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \in P_\tau \,,$$

wobei wir mit P_τ die Menge der positiven Gitterpunkt bezeichnen die gegeben ist durch

$$P_\tau := \{m\tau + n \in \Lambda_\tau \mid {\color{blue} m > 0} \vee ({\color{red} m = 0 \wedge n > 0})\} = {\color{blue} U} \cup {\color{red} R}$$



Multiple Eisensteinreihen

Definition

Für $s_1, s_2, \ldots, s_l \geq 2$ definieren wir die **Multiple Eisensteinreihe** durch

$$G_{s_1,\ldots,s_l}(\tau) := \sum_{\substack{\lambda_1 \succ \cdots \succ \lambda_l \succ 0 \\ \lambda_i \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}}} \frac{1}{\lambda_1^{s_1} \ldots \lambda_l^{s_l}} .$$

Mit l bezeichnen wir die Länge und mit $s_1 + \cdots + s_l$ das Gewicht.

- Die Summe ist für $s_1 \geq 3$ absolut konvergent. Für $s_1 = 2$ benutzt man die Eisensteinsummation.
- Man kann zeigen, dass sich das Produkt von zwei Multiplen Eisensteinreihen durch das Stuffle Produkt ausdrücken lässt. Zum Beispiel ist:

$$G_2(\tau) \cdot G_3(\tau) = G_{2,3}(\tau) + G_{3,2}(\tau) + G_5(\tau) .$$

- Jede Modulform lässt sich somit schreiben als Linearkombination von Multiplen Eisensteinreihen.

Multiple Teilersummen & Brackets

Um die Fourierentwicklung von Multiplen Eisensteinreihen hinzuschreiben benötigen wir folgende Verallgemeinerung der Teilersummen.

Definition

Für $s_1, s_2, \ldots, s_l \geq 1$ definieren wir

$$[s_1, \ldots, s_l] := \sum_{\substack{u_1 > \cdots > u_l > 0 \\ v_1, \ldots, v_l > 0}} \frac{v_1^{s_1 - 1} \ldots v_l^{s_l - 1}}{(s_1 - 1)! \ldots (s_l - 1)!} \cdot q^{u_1 v_1 + \cdots + u_l v_l}$$

$$= \frac{1}{(s_1 - 1)! \ldots (s_l - 1)!} \sum_{n > 0} \sigma_{s_1 - 1, \ldots, s_l - 1}(n) q^n \in \mathbb{Q}[[q]]$$

Die Koeffizienten $\sigma_{s_1 - 1, \ldots, s_l - 1}$ bezeichnen wir dabei als **Multiple Teilersummen** und die q-Reihen $[s_1, \ldots, s_l]$ bezeichnen wir im Folgenden als **Brackets**.

Multiple Eisensteinreihen - Fourierentwicklung

Mit $q = e^{2\pi i\tau}$ können wir die Brackets als holomorphe Funktionen auf $\mathbb{H}$ auffassen und schreiben für $t_1, \ldots, t_m \geq 1$

$$g_{t_1,\ldots,t_m}(\tau) := (-2\pi i)^{t_1+\cdots+t_m}[t_1, \ldots, t_m] \in \mathcal{O}(\mathbb{H})\,.$$

Theorem (B. 2012)

Für $s_1, \ldots, s_l \geq 2$ lassen sich die Multiplen Eisensteinreihen $G_{s_1,\ldots,s_l}$ als $\mathcal{MZ}$-Linearkombinationen der $g_{t_1,\ldots,t_m}$ schreiben.

$$\begin{aligned} G_k(\tau) =& \zeta(k) + g_k(\tau)\,,\\ G_{3,2,2}(\tau) =& \zeta(3,2,2) + \left(\frac{54}{5}\zeta(2,3) + \frac{51}{5}\zeta(3,2)\right) g_2(\tau) + \frac{16}{3}\zeta(2,2)g_3(\tau)\\ &+ 3\zeta(3)g_{2,2}(\tau) + 4\zeta(2)g_{3,2}(\tau) + g_{3,2,2}(\tau)\,. \end{aligned}$$

Frage & Motivation für meine Dissertation

Aus Konvergenzgründen sind die Multiplen Eisensteinreihen nur für $s_1, \ldots, s_l \geq 2$ definiert. Um eine direkte Verbindung von Multiplen Zeta-Werten zu Modulformen zu erhalten stellt sich daher die folgende Frage:

Frage

Was ist eine "gute" Definition von "regularisierten" Multiplen Eisensteinreihen, so dass es für jeden MZV $\zeta(s_1, \ldots, s_l)$ mit $s_1 \geq 2$ und $s_2, \ldots, s_l \geq 1$ eine Multiple Eisensteinreihe gibt der Form

$$G^{reg}_{s_1,\ldots,s_l}(\tau) = \zeta(s_1, \ldots, s_l) + \sum_{n>0} a_n q^n \,,$$

mit $G^{reg}_{s_1,\ldots,s_l} = G_{s_1,\ldots,s_l}$ für $s_1, \ldots, s_l \geq 2$?

Antwort

Diese Frage wurde dabei in folgenden Schritten beantwortet:

- Untersuchung der Struktur des $\mathbb{Q}$-Vektorraums der durch die Brackets $[s_1, \ldots, s_l]$ aufgespannt wird.
- Erweiterung dieses Raumes zu einer größeren Klasse (Bi-Brackets) von q-Reihen.
- Beschreibung einer Analogie zum Stuffle und Shuffle Produkt auf dem Raum der Bi-Brackets.
- Benutzung einer Verbindung von der Fourierentwicklung von MES zu dem Koprodukt von formalen iterierten Integralen.

Brackets

Mit $\mathcal{MD}$ bezeichnen wir den $\mathbb{Q}$-Vektorraum der von allen Brackets und der Konstanten $1 \in \mathbb{Q}[[q]]$ aufgespannt wird.

Theorem

- Der Raum $\mathcal{MD}$, ausgestattet mit der gewöhnlichen Multiplikation von formalen q-Reihen, ist eine $\mathbb{Q}$-Algebra.
- Der Ring der (quasi-)Modulformen mit rationalen Koeffizienten ist in $\mathcal{MD}$ enthalten.

Das Produkt zweier Brackets lässt sich Beschreiben durch ein Quasi-Shuffle Produkt und der Beweis geht analog zum Beweis des Stuffle Produktes von MZV.

Beispiel:

$$[2] \cdot [3] = [3,2] + [2,3] + [5] - \frac{1}{12}[3]\,.$$

Brackets

Theorem

Der Operator $\mathrm{d} = q\frac{d}{dq}$ ist eine Derivation auf $\mathcal{MD}$.

Der Beweis des Theorems liefert explizite Formeln für die Ableitungen von Brackets.

Beispiel:

$$\mathrm{d}[3] = [2] \cdot [3] - [2,3] - 3[3,2] - 6[4,1] + 3[4]\,.$$

Umgeschrieben ergibt dies

$$[2] \cdot [3] = [2,3] + 3[3,2] + 6[4,1] - 3[4] + \mathrm{d}[3]\,.$$

Gibt es also auch eine Analogie zum Shuffle Produkt?

Bi-Brackets

Definition

Für $s_1, \dots, s_l \geq 1$ und $r_1, \dots, r_l \geq 0$ definieren wir die **Bi-Bracket** durch

$$\begin{bmatrix} s_1, \dots, s_l \\ r_1, \dots, r_l \end{bmatrix} := \sum_{\substack{u_1 > \cdots > u_l > 0 \\ v_1, \dots, v_l > 0}} \frac{u_1^{r_1}}{r_1!} \cdots \frac{u_l^{r_l}}{r_l!} \cdot \frac{v_1^{s_1 - 1} \dots v_l^{s_l - 1}}{(s_1 - 1)! \dots (s_l - 1)!} \cdot q^{u_1 v_1 + \cdots + u_l v_l} .$$

Mit l bezeichnen wir ihre Länge und mit $s_1 + \cdots + s_l + r_1 + \cdots + r_l$ ihr Gewicht.

Bi-Brackets können als "partielle" Ableitungen der Brackets angesehen werden. In Länge $l = 1$ ist zum Beispiel

$$\mathrm{d}[k] = k \begin{bmatrix} k+1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

- Das Quasi-Shuffle Produkt von Brackets überträgt sich auf Bi-Brackets (Analogie zum Stuffle Produkt).
- Im Folgenden werden wir sehen, dass es für Bi-Brackets auch noch eine zweite Möglichkeit gibt das Produkt auszudrücken.

Bi-Brackets

Um diese zweite Art der Auswertung des Produktes zu Beschreiben, benutzen wir die Erzeugendenreihen der Bi-Brackets:

$$\left| \begin{matrix} X_1, \ldots, X_l \\ Y_1, \ldots, Y_l \end{matrix} \right| := \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_l>0 \\ r_1,\ldots,r_l>0}} \begin{bmatrix} s_1, \ldots, s_l \\ r_1-1, \ldots, r_l-1 \end{bmatrix} X_1^{s_1-1} \ldots X_l^{s_l-1} \cdot Y_1^{r_1-1} \ldots Y_l^{r_l-1}.$$

Lemma

Die Erzeugendenreihen der Bi-Brackets lassen sich schreiben als

$$\left| \begin{matrix} X_1, \ldots, X_l \\ Y_1, \ldots, Y_l \end{matrix} \right| = \sum_{u_1>\cdots>u_l>0} \prod_{j=1}^{l} e^{u_j Y_j} \frac{e^{X_j} q^{u_j}}{1-e^{X_j} q^{u_j}} .$$

Bi-Brackets - Partitionsrelation

Theorem (Partitionsrelation)

Für alle $l \geq 1$ gilt

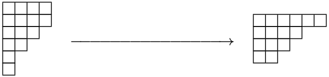
$$\begin{vmatrix} X_1, \ldots, X_l \\ Y_1, \ldots, Y_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 + \cdots + Y_l, \ldots, Y_1 + Y_2, Y_1 \\ X_l, X_{l-1} - X_l, \ldots, X_1 - X_2 \end{vmatrix}$$

Das Theorem liefert lineare Relationen zwischen Bi-Brackets in einer fixen Länge. z.B.:

$$\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r+1 \\ s-1 \end{bmatrix} \quad \text{für alle } r \geq 0, s \geq 1\,,$$

$$\begin{bmatrix} 2,2 \\ 1,1 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 2,2 \\ 0,2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,2 \\ 1,1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 3,1 \\ 0,2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3,1 \\ 1,1 \end{bmatrix}.$$

Beweisidee: Interpretiere die Summe in der Definition der Bi-Brackets als Summe über Partitionen und benutze die Dualität von Partitionen.



Bi-Brackets - Analogon zum Shuffle Produkt

Mit dem Quasi-Shuffle Produkt ($\circledast$) und der Partitionsrelation (P) erhalten wir

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \overset{\circledast}{=} \begin{bmatrix}1,1\\1,2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1,1\\2,1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1,1\\1,2\end{bmatrix} \overset{P}{=} \begin{bmatrix}3,2\\0,0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}4,1\\0,0\end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix}1,1\\2,1\end{bmatrix} \overset{P}{=} \begin{bmatrix}2,3\\0,0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}3,2\\0,0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}4,1\\0,0\end{bmatrix}.$$

Damit lässt sich das Produkt $[2] \cdot [3]$ wie folgt berechnen

$$\begin{aligned}
[2] \cdot [3] = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} &\overset{P}{=} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \\
&\overset{\circledast}{=} \begin{bmatrix}1,1\\1,2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1,1\\2,1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \\
&\overset{P}{=} \begin{bmatrix}2,3\\0,0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}3,2\\0,0\end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix}4,1\\0,0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} \\
&= [2,3] + 3[3,2] + 6[4,1] - 3[4] + 3\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Bi-Brackets

Theorem

- Der Raum $\mathcal{BD}$ aufgespannt von allen Bi-Brackets $\begin{bmatrix} s_1,\dots,s_l \\ r_1,\dots,r_l \end{bmatrix}$ ist eine $\mathbb{Q}$-algebra mit dem Raum $\mathcal{MD}$ als Unteralgebra.
- Es gibt zwei unterschiedliche natürliche Arten um das Produkt von zwei Bi-Brackets wieder als Linearkombinationen von Bi-Brackets zu schreiben.
- Es gibt explizit angebbare Elemente $[s_1,\dots,s_l]^{\sqcup\!\sqcup} \in \mathcal{BD}$ (**Shuffle Brackets**), deren Produkte sich wie das Shuffle Produkt von MZV ausdrücken lassen.
- Für $s_2,\dots,s_l \geq 2$ gilt $[s_1,\dots,s_l]^{\sqcup\!\sqcup} = [s_1,\dots,s_l]$.

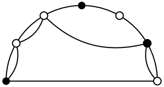
Beispiel:

$$[2]^{\sqcup\!\sqcup} \cdot [3]^{\sqcup\!\sqcup} = [2,3]^{\sqcup\!\sqcup} + 3[3,2]^{\sqcup\!\sqcup} + 6[4,1]^{\sqcup\!\sqcup} .$$

Die Shuffle Brackets $[s_1,\dots,s_l]^{\sqcup\!\sqcup}$ werden benötigt für die Definition der regularisierten Multiplen Eisensteinreihen.

Koprodukt formaler iterierter Integrale vs. MES

- Für die Beantwortung der Eingangsfrage betrachten wir den von Goncharov definierten Raum **formaler iterierter Integrale** $\mathcal{I}^1$ aufgespannt durch Symbole $I(s_1, \ldots, s_l)$ mit $s_1, \ldots, s_l \geq 1$.
- Dies ist eine $\mathbb{Q}$-Algebra mit dem Shuffle Produkt als Multiplikation.
- Der Raum $\mathcal{I}^1$ ist ausgestattet mit einem explizit angegebenen Koprodukt Δ und besitzt die Struktur einer Hopf-Algebra.



Beispiel:

$$\Delta(I(3,2)) = 1 \otimes I(3,2) + 3I(2) \otimes I(3) + 2I(3) \otimes I(2) + I(3,2) \otimes 1\,.$$

Beobachtung

Die auftretenen Koeffizienten sind die selben wie in der Fourierentwicklung von $G_{3,2}$:

$$G_{3,2}(\tau) = \zeta(3,2) + 3g_2(\tau)\zeta(3) + 2g_3(\tau)\zeta(2) + g_{3,2}(\tau)\,.$$

Multiple Eisensteinreihen - Shuffle Regularisierung

Idee

Benutze das Koprodukt Δ auf $\mathcal{I}^1$ um shuffle-regularisierte Multiple Eisensteinreihen $G^{\shuffle}$ zu definieren.

Definieren dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{\shuffle} : \mathcal{I}^1 &\longrightarrow \mathbb{Q}[2\pi i][[q]] \\ I(s_1, \dots, s_l) &\longmapsto (-2\pi i)^{s_1 + \dots + s_l} [s_1, \dots, s_l]^{\shuffle} \,. \end{aligned}$$

Dies ist ein Algebrahomomorphismus aufgrund der Eigenschaften der Shuffle Brackets.

Definiere damit die Abbildung $G^{\shuffle} : \mathcal{I}^1 \to \mathbb{C}[[q]]$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}^1 \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "G^{\shuffle}"'] & \mathcal{I}^1 \otimes \mathcal{I}^1 \arrow[d, "\zeta^{\shuffle} \otimes \mathfrak{g}^{\shuffle}"] \\ \mathbb{C}[[q]] & \mathcal{MZ} \otimes \mathbb{Q}[2\pi i][[q]] \arrow[l, "\cdot"'] \end{tikzcd}$$

wobei $\zeta^{\shuffle} : \mathcal{I}^1 \to \mathcal{MZ}$ durch die shuffle-regularisierten MZV gegeben ist.

Multiple Eisensteinreihen - Shuffle Regularisierung

$$G^{ш}_{s_1,\dots,s_l}(q) = G^{ш}(I(s_1,\dots,s_l)) \in \mathbb{C}[[q]]\,,$$
$$g^{ш}_{s_1,\dots,s_l}(q) = \mathfrak{g}^{ш}(I(s_1,\dots,s_l)) = (-2\pi i)^{s_1+\dots+s_l}[s_1,\dots,s_l]^{ш} \in \mathbb{Q}[2\pi i][[q]]\,.$$

Theorem (B., K. Tasaka 2014)

Für alle $s_1,\dots,s_l \geq 1$ haben die **shuffle-regularisierten Multiple Eisensteinreihen** $G^{ш}_{s_1,\dots,s_l}(q)$ folgende Eigenschaften

- Sie lassen sich als $\mathcal{MZ}$-Linearkombinationen der $g^{ш}$ schreiben. Es gibt $a_{\underline{t}} \in \mathbb{Q}$ mit

$$G^{ш}_{s_1,\dots,s_l}(q) = \zeta^{ш}(s_1,\dots,s_l) + \sum_{\substack{\underline{t}=(\underline{t_1},\underline{t_2}) \\ t_1,t_2 \neq \emptyset}} a_{\underline{t}}\zeta^{ш}(\underline{t_1})g^{ш}_{\underline{t_2}}(q) + g^{ш}_{s_1,\dots,s_l}(q)\,.$$

- Ihr Produkt lässt sich durch das Shuffle Produkt ausdrücken.
- Für $s_1,\dots,s_l \geq 2$ sind sie durch die Multiplen Eisensteinreihen gegeben, d.h.

$$G^{ш}_{s_1,\dots,s_l}(\tau) = G_{s_1,\dots,s_l}(\tau) \qquad (q = e^{2\pi i\tau})\,.$$

  Somit lässt sich das Produkt in diesen Fällen auch durch das Stuffle Produkt ausdrücken.

Weitere Ergebnisse der Dissertation

Neben der Algebrastruktur der (Bi-)Brackets und der shuffle-regularisierten Multiplen Eisensteinreihen habe ich mich in meiner Dissertation unter anderem mit folgenden Thematiken beschäftigt:

- Definition von stuffle-regularisierten Multiple Eisensteinreihen.
- Vergleich der beiden Regularisierungen.
- Computerunterstützte Berechnung von unteren Schranken für die Dimension der Räume $\mathcal{MD}$ und $\mathcal{BD}$.
- Vermutung: $\mathcal{MD} = \mathcal{BD}$.
- Betrachtung der Brackets als q-Analogon von Multiplen Zeta-Werten. Vergleich mit bestehenden Modellen von q-Analoga (Bradley, Ohno, Zhao, Zudilin,...).

Bonus: (Bi-)Brackets als q-Analog von MZV

Definiere für $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung $Z_k : \mathbb{Q}[[q]] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch

$$Z_k(f) = \lim_{q \to 1} (1-q)^k f(q) \,.$$

Satz

Sei $s_1 > r_1 + 1$ und $s_j \geq r_j + 1$ für $j = 2, \dots, l$, dann gilt

$$Z_{s_1 + \cdots + s_l}\left(\begin{bmatrix} s_1, \dots, s_l \\ r_1, \dots, r_l \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{r_1! \dots r_l!} \zeta(s_1 - r_1, \dots, s_l - r_l) \,.$$

Insbesondere gilt für $s_1 > 1$, dass

$$Z_k([s_1, \dots, s_l]) = \begin{cases} \zeta(s_1, \dots, s_l) \,, & s_1 + \cdots + s_l = k, \\ 0 \,, & s_1 + \cdots + s_l < k \,. \end{cases}$$

Bonus - Quasi-Shuffle Algebra & Produkt

- Sei A (das Alphabet) eine abzählbare Menge,
- $\mathbb{Q}A$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der durch diese Buchstaben aufgespannt wird,
- $\mathbb{Q}\langle A\rangle$ die zugehörige nicht kommutative Polynomalgebra über $\mathbb{Q}$ (Wörter),
- und sei $\diamond$ ein assoziatives Produkt auf $\mathbb{Q}A$

Definiton

Für Buchstaben $a, b \in A$ und Wörter $w, v \in \mathbb{Q}\langle A\rangle$ definieren wir auf $\mathbb{Q}\langle A\rangle$ rekursiv das Produkt $\odot$ durch $1 \odot w = w \odot 1 = w$ und

$$aw \odot bv := a(w \odot bv) + b(aw \odot v) + (a \diamond b)(w \odot v)\,.$$

Nach einem Resultat von Hoffman ist $(\mathbb{Q}\langle A\rangle, \odot)$ eine kommutative $\mathbb{Q}$-Algebra die **Quasi-Shuffle Algebra** genannt wird. Das Produkt $\odot$ wird **Quasi-Shuffle Produkt** genannt.

Bonus: Bi-Brackets - Partitionen

Unter einer Partition einer natürlichen Zahl n mit l Teilen verstehen wir eine Darstellung von n als Summe von l unterschiedlichen Summanden (die in der Summe mehrfach auftreten dürfen).

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} 15 &= 4+4+3+2+1+1 \\ &= 4\cdot 2+3\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 2 \end{aligned}$$

eine Partition von 15 mit den 4 unterschiedlichen Zahlen $4, 3, 2, 1$ und Multiplizitäten $2, 1, 1, 2$.

Wir identifizieren eine Partition von n mit l Teilen mit $\binom{u}{v}$, wobei $u, v \in \mathbb{N}^l$.

- Die u_j entsprechen den Summanden.
- Die v_j zählen die Häufigkeit ihres Auftreten in der Summe.

Obige Partition identifizieren wir somit mit $\binom{u}{v} = \binom{4,3,2,1}{2,1,1,2}$.

Bonus: Bi-Brackets - Partitionen

Die Menge aller Partitionen von n mit l Teilen bezeichnen wir mit $P_l(n)$ und setzen daher

$$P_l(n) := \left\{ \binom{u}{v} \in \mathbb{N}^l \times \mathbb{N}^l \;\middle|\; n = u_1 v_1 + \cdots + u_l v_l \,,\;\; u_1 > \cdots > u_l > 0 \right\} .$$

Damit lassen sich die Bi-Brackets schreiben als

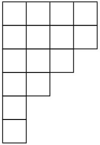
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_1, \ldots, s_l \\ r_1, \ldots, r_l \end{bmatrix} &:= c \cdot \sum_{\substack{u_1 > \cdots > u_l > 0 \\ v_1, \ldots, v_l > 0}} u_1^{r_1} v_1^{s_1 - 1} \ldots u_l^{r_l} v_l^{s_l - 1} q^{u_1 v_1 + \cdots + u_l v_l} \\ &= c \cdot \sum_{n > 0} \left(\sum_{\binom{u}{v} \in P_l(n)} u_1^{r_1} v_1^{s_1 - 1} \ldots u_l^{r_l} v_l^{s_l - 1} \right) q^n \,, \end{aligned}$$

wobei $c = (r_1!(s_1 - 1)! \ldots r_l!(s_l - 1)!)^{-1}$.

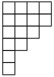
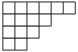
Bonus: Bi-Brackets - Partitionen

Auf der Menge $P_l(n)$ haben wir eine Involution gegeben durch die Konjugation ρ von Partitionen (Drehung und Spiegelung des Young-Diagramms)

Die Partition von eben können wir z.B. darstellen durch

$$\begin{pmatrix}4,3,2,1\\2,1,1,2\end{pmatrix} =$$

.

Die Konjugation ρ von dieser Partition ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix}4,3,2,1\\2,1,1,2\end{pmatrix} =$$

$$\xrightarrow{\qquad\quad\rho\quad\qquad}$$

$$= \begin{pmatrix}6,4,3,2\\1,1,1,1\end{pmatrix}$$

Bonus: Bi-Brackets - Partitionsrelation - Beispiel

Mit Hilfe der Involution ρ auf der Menge $P_l(n)$ erhält man zum Beispiel:

$$\begin{bmatrix}2,2\\0,0\end{bmatrix} = \sum_{n>0}\left(\sum_{\binom{u}{v}\in P_2(n)} v_1\cdot v_2\right)q^n = \sum_{n>0}\left(\sum_{\binom{u'}{v'}=\rho\left(\binom{u}{v}\right)\in P_2(n)} v_1'\cdot v_2'\right)q^n$$

$$= \sum_{n>0}\left(\sum_{\binom{u'}{v'}=\rho\left(\binom{u}{v}\right)\in P_2(n)} u_2\cdot(u_1-u_2)\right)q^n$$

$$= \sum_{n>0}\left(\sum_{\binom{u}{v}\in P_2(n)} u_2\cdot u_1\right)q^n - \sum_{n>0}\left(\sum_{\binom{u}{v}\in P_2(n)} u_2^2\right)q^n$$

$$= \begin{bmatrix}1,1\\1,1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1,1\\0,2\end{bmatrix}.$$

Bonus: Bi-Brackets - Partitionsrelation

Im Allgemeinen ist die Konjugation ρ auf $P_l(n)$ explizit gegeben durch

$$\rho : \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_l \\ v_1, \dots, v_l \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_1 + \dots + v_l, \dots, v_1 + v_2, v_1 \\ u_l, u_{l-1} - u_l, \dots, u_1 - u_2 \end{pmatrix}.$$

Angewandt auf die Summanden in der Erzeugendenreihe der Bi-Brackets liefert die Partitionsrelation

$$\begin{vmatrix} X_1, \dots, X_l \\ Y_1, \dots, Y_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 + \dots + Y_l, \dots, Y_1 + Y_2, Y_1 \\ X_l, X_{l-1} - X_l, \dots, X_1 - X_2 \end{vmatrix}.$$

Bonus: Bi-Brackets - Shuffle Brackets

Es gibt explizite Formeln für die Shuffle Brackets in allen Längen.

Proposition

Für $s_1, s_2 \geq 1$ sind die Shuffle Brackets in Länge 2 und 3 gegeben durch

$$[s_1, s_2]^{ш} = [s_1, s_2] + \delta_{s_2,1} \cdot \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} s_1 \\ 1 \end{bmatrix} - [s_1] \right) ,$$

$$\begin{aligned} [s_1, s_2, s_3]^{ш} = [s_1, s_2, s_3] &+ \delta_{s_3,1} \cdot \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} s_1, s_2 \\ 0, 1 \end{bmatrix} - [s_1, s_2] \right) \\ &+ \delta_{s_2,1} \cdot \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} s_1, s_3 \\ 1, 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_1, s_3 \\ 0, 1 \end{bmatrix} - [s_1, s_3] \right) \\ &+ \delta_{s_2 \cdot s_3,1} \cdot \frac{1}{6} \left(\begin{bmatrix} s_1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} s_1 \\ 1 \end{bmatrix} + [s_1] \right) . \end{aligned}$$

Bonus: Formale iterierte Integrale & Koprodukt

- Die $\mathbb{Q}$-Algebra $\mathcal{I}$ der **formalen iterierten Integrale** wird als Vektorraum aufgespannt durch Symbole $\mathbb{I}(a_0; a_1, \ldots, a_N; a_{N+1})$, wobei $a_i \in \{0,1\}$, $N \geq 0$, modulo Relationen die von echten iterierten Integralen kommen.
- Das Produkt ist gegeben durch das Shuffle Produkt $\sqcup\!\sqcup$.

Das Koprodukt Δ auf $\mathcal{I}$ ist definiert durch

$$\Delta\left(\mathbb{I}(a_0; a_1, \ldots, a_N; a_{N+1})\right) :=$$

$$\sum \left(\mathbb{I}(a_0; a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}; a_{N+1}) \otimes \prod_{p=0}^{k} \mathbb{I}(a_{i_p}; a_{i_p+1}, \ldots, a_{i_{p+1}-1}; a_{i_{p+1}}) \right),$$

wobei die Summe über alle $i_0 = 0 < i_1 < \cdots < i_k < i_{k+1} = N+1$ läuft mit $0 \leq k \leq N$.

Goncharov

Das Triple $(\mathcal{I}, \sqcup\!\sqcup, \Delta_G)$ ist eine kommutative Hopf-Algebra über $\mathbb{Q}$.

Bonus: Formale iterierte Integrale

Wir betrachten den Quotientenraum

$$\mathcal{I}^1 = \mathcal{I}/\mathbb{I}(1;0;0)\mathcal{I}$$

und schreiben I für die Bilder der $\mathbb{I}$ in $\mathcal{I}^1$. Für $n \geq 0, s_1, \ldots, s_l \geq 1$, setzen wir

$$I_n(s_1, \ldots, s_l) := I(1; \underbrace{0, 0, \ldots, 1}_{s_1}, \ldots, \underbrace{0, 0, \ldots, 1}_{s_l}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n}; 0).$$

Inbesondere schreiben wir $I(s_1, \ldots, s_l)$ für $I_0(s_1, \ldots, s_l)$.

Satz

- Für $n \geq 0$ und $s_1, \ldots, s_l \geq 1$ gilt

$$I_n(s_1, \ldots, s_l) = (-1)^n \sum^{*} \left(\prod_{j=1}^{l} \binom{k_j - 1}{s_j - 1} \right) I(k_1, \ldots, k_l),$$

  wobei die Summe über alle Zahlen $k_1, \ldots, k_l \geq 1$ mit $k_1 + \cdots + k_l = s_1 + \cdots + s_l + n$ läuft.
- Die Elemente $I(s_1, \ldots, s_l)$ bilden eine Basis von $\mathcal{I}^1$.