第54卷第2期 数 学 进 展 Vol. 54, No. 2
2025年3月 ADVANCES IN MATHEMATICS (CHINA) Mar., 2025

doi: 10.11845/sxjz.2024012a

多重 zeta 值及相关理论

徐 策 [1,*], 赵健强 [2,**]

(1. 安徽师范大学数学与统计学院, 芜湖, 安徽, 241002; 2. 毕夏普学校数学系, 拉荷亚, CA 92037, 美国)

摘要: 近年来, 多重 zeta 值及相关理论已被广泛地应用于量子物理学、纽结理论、数论、非交换几何等学科中, 对多重 zeta 值相关问题的研究已成为数学和物理学中非常活跃的一个领域. 至今, 该领域已取得了许多有趣且深刻的结果, 但仍然有许多公开的问题和猜想有待解决. 本文我们将系统地阐述多重 zeta 值及相关变形的算术、代数、组合及几何性质, 特别是对多重 zeta 值及其奇偶变形 (如: 多重 t-zeta 值, 多重 T-zeta 值, 多重 S-zeta 值, 多重 M-zeta 值及其交错形式等)、q- 模拟多重 zeta 值、motive 理论和罗巴代数理论等相关理论的关联进行综述.

关键词: 多重 zeta 值; 奇偶变形; 对偶关系; 双洗牌关系; q- 模拟多重 zeta 值; motive 理论; 罗巴代数

MSC(2020) 主题分类: 11-02; 11M32; 11M99 / **中图分类:** O156

文献标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2025)02-0315-28

1 多重 zeta 值及相关变形的定义

1.1 黎曼 zeta 函数

现代数论中存在各种类型的 zeta 函数及其推广 L- 函数, 例如: 解析数论中有 Dirichlet L- 函数, 算术代数几何中有代数簇的 Hasse–Weil zeta 函数, 代数数论有数域的 Dedekind zeta 函数, Galois 表示理论有 Artin L- 函数, 自守形式理论有 Hecke L- 级数等等, 但最典型的 zeta 函数是黎曼 zeta 函数 $\zeta(s)$, 其在实部大于 1 的复平面上可以写成如下级数形式

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\Re(s) > 1).$$

这些 zeta 函数 (及其推广 L- 函数) 是现代数论中重要的研究对象, 而其在整数点处的取值则是一个重要的研究主题. 当 $k > 1$ 为正整数时 $\zeta(k)$ 称为黎曼 zeta 值. 当 k 分别为奇数和偶数时, 则称 $\zeta(k)$ 为奇黎曼 zeta 值和偶黎曼 zeta 值. 特别地, 欧拉在 1735 年左右发现了关于偶黎曼 zeta 值的封闭公式, 即著名的欧拉公式

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} B_{2k}}{2(2k)!} (2\pi)^{2k} \in \mathbb{Q}\pi^{2k},$$

其中 B_k 是 Bernoulli 数, 其生成函数为 $\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$. 显然 B_k 是一个有理数, 因此欧拉公式表明偶黎曼 zeta 值 $\zeta(2k)$ 与 π^{2k} 的商是一个有理数, 然而对于奇黎曼 zeta 值, 就一直没有发现类似的公式, 这方面一个著名的结果是印度著名数学家 Ramanujan[13] 发现的 $\zeta(2k+1)$ 的

收稿日期: 2024-11-12. 录用日期: 2024-12-17.
基金项目: 国家自然科学基金 (No. 12101008).
E-mail: * 通信作者: cexu2020@ahnu.edu.cn; ** zhaoj@ihes.fr

公式

$$(4\beta)^{-k}\left[\frac{1}{2}\zeta(2k+1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k+1}(\mathrm{e}^{2n\alpha}-1)}\right]-(4\alpha)^{-k}\left[\frac{1}{2}\zeta(2k+1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k+1}(\mathrm{e}^{2n\beta}-1)}\right]$$
$$=\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^{j-1}\frac{B_{2j}B_{2k+2-2j}}{(2j)!(2k+2-2j)!}\alpha^j\beta^{k+1-j}\quad(\alpha\beta=\pi,\ k\geq 1).$$

特别地, 如果令 k 为奇的正整数, 并取 $\alpha=\beta=\pi$, 则上式可化简为

$$\zeta(2k+1)=2^{2k}\pi^{2k+1}\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^{j+1}\frac{B_{2j}}{(2j)!}\frac{B_{2k+2-2j}}{(2k+2-2j)!}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2k-1}}{\mathrm{e}^{2\pi n}-1}.$$

这个公式是由 Lerch 于 1901 年首次发现的 (参见 [13, 第 276 页]).

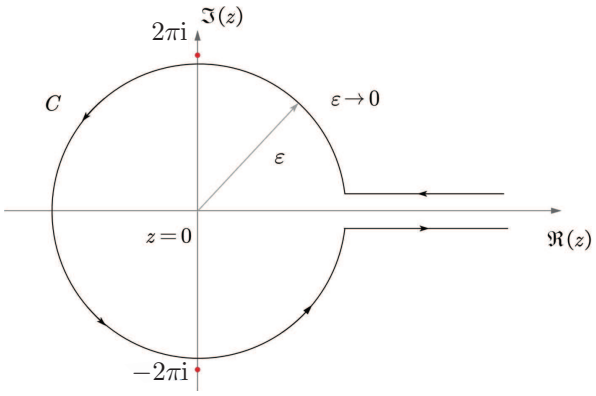

图 1 围道路径 $\int_{\infty}^{(0+)}$

根据定义和 Gamma 函数的性质, 利用复变函数的方法可以得到黎曼 zeta 函数的围道积分表达式 [126]:

$$\zeta(s)=-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\infty}^{(0+)}\frac{(-z)^{s-1}}{\mathrm{e}^z-1}\mathrm{d}z,\tag{1.1}$$

其中辐角 $|\arg(-z)|<\pi$, 这个围道路径 $\int_{\infty}^{(0+)}$ 是一种 Hankel 围道 (如图 1 所示), 具体路径是首先从上半平面挨近正实轴无穷远处出发, 向左行, 围绕原点正向一周, 到下半平面, 再向右行到下半平面挨近正实轴无穷远处, 并且围道内不含被积函数的奇点 $z=2\pi n\mathrm{i}$ $(n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots)$. (1.1) 式右边的围道积分是一个对一切复数值 s 都解析的单值函数, 因此可以利用围道积分将对应的黎曼 zeta 函数解析延拓成整个复平面上的一个亚纯函数, 即将定义区间从 $\Re(s)>1$ 拓展至整个复平面上. 而著名的千禧年问题之一的黎曼猜想就是猜测解析延拓至整个复平面的黎曼 zeta 函数 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点都位于 $\Re(s)=\frac{1}{2}$ 这条直线上.

在黎曼 zeta 值的各类研究问题当中, 对其无理性及超越性的研究一直都是数论领域最受关注的热点问题之一. 因为 π 是无理数也是超越数, 所以由欧拉公式可知, 所有偶黎曼 zeta 值也都是无理数和超越数. 而对于奇黎曼 zeta 值的无理性和超越性的研究, 由于一直都没有发现类似于偶黎曼 zeta 值的欧拉公式, 所以直接判断奇黎曼 zeta 值的无理性和超越性是非常困难的. 因

此, 在很长一段时间里, 人们在该问题上都没有取得任何实质性的进展. 直到 1979 年, 法国数学家 R. Apéry[2] 发现了 $\zeta(3)$ 与如下含中心二项式系数 (也称中心组合数) 的无穷级数的算术关系

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\binom{2n}{n}=\frac{2}{5}\zeta(3),$$

并利用该关系式证明了 $\zeta(3)$ 的无理性. 后来, F. Beukers[14] 和美国科学院院士 D. Zagier 根据 Apéry 的思路进行了详细计算, 证明了 $\zeta(3)$ 是一个无理数, 这是数论领域首个关于奇黎曼 zeta 值无理性的结果, 该工作重新激活了人们对奇黎曼 zeta 值无理性的研究兴趣, 并为黎曼 zeta 值无理性的研究提供了新的思路. 目前, 人们只在奇黎曼 zeta 值的无理性的研究中取得了一定进展, 比如 W. Zudilin[148] 在 2001 年证明了 $\zeta(5),\zeta(7),\zeta(9),\zeta(11)$ 中至少有一个是无理数, 之后在 2018 年他 [150] 又用一种更简单的方法证明了 $\zeta(5)$ 到 $\zeta(25)$ 中的奇 zeta 值至少会有一个无理数, 而对于奇黎曼 zeta 值的超越性的研究一直没有取得实质性的进展. Zudilin 的方法经过 Sprang[115], Fischler–Sprang–Zudilin[50] 和赖力和于品 [90] 等人的进一步发展, 得到了目前对奇黎曼 zeta 值无理性的研究中取得的最好的结果: 对于任意充分小的 ε, 以下奇黎曼 zeta 值

$$\zeta(3),\zeta(5),\zeta(7),\ldots,\zeta(s)$$

中至少有 $(c-\varepsilon)\sqrt{s/\log(s)}$ (常数 $c=1.192507\ldots$) 个是无理数, 其中 s 是一个充分大的奇数且与 ε 相关. 由于 Apéry 的贡献, 此后, 通项含中心组合数及类似的组合数的无穷级数一般都被称为 Apéry 级数, 并成为了数论领域的热点研究问题之一. 特别地, 2021 年南京大学孙智伟教授在其最新的专著 [116] 中给出了大量关于 Apéry 型级数恒等式的猜想, 其中部分级数猜想已经在 [4, 27, 33, 117, 147] 中被证明了. 在此之后, 人们利用组合、代数与数论的方法得到了 Apéry 级数与黎曼 zeta 值的许多关系式, 而且还发现了一些 Apéry 级数与黎曼 zeta 值的多重推广有着密切的联系, 近期的一些研究可参见 [1, 40, 69, 79, 125, 127, 132], 比如 M. Kalmykov、B. Ward 和 S. Yost[79] 证明了两类 Apéry 型级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(k_1)}H_n^{(k_2)}\cdots H_n^{(k_r)}}{n^k}4^n\binom{2n}{n}^{-1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(k_1)}H_n^{(k_2)}\cdots H_n^{(k_r)}}{n^k4^n}\binom{2n}{n}$$

可以写成如下交错形式的多重 zeta 值

$$\sum_{0<n_1<\cdots<n_m}\frac{(\pm1)^{n_1}\cdots(\pm1)^{n_m}}{n_1^{l_1}\cdots n_m^{l_m}}\quad (l_1+\cdots+l_m=k+k_1+\cdots+k_r)$$

的 $\mathbb{Q}$- 线性组合, 其中 $k,k_1,\ldots,k_r,l_1,\ldots,l_m$ 均为正整数, 这里的 $H_n^{(k)}$ 是指广义的调和数, 定义为 $H_n^{(k)}:=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^k}$ 且 $H_n\equiv H_n^{(1)}$. 显然, 当 $k\geq 2$ 时, 有 $\zeta(k)=\lim_{n\to\infty}H_n^{(k)}$, 即调和数 $H_n^{(k)}$ $(k\geq 2)$ 可以看作是黎曼 zeta 值的前 n 项部分和. 并且他们还发现了 Apéry 型级数与黎曼 zeta 值的多重级数推广在物理领域中的一些应用, 比如, 双回路费曼图中的许多结果就可以表示成一些 Apéry 级数的多重推广的组合, 而这些 Apéry 级数的多重推广又可以表示成黎曼 zeta 值的一些多重级数推广的组合. 因此, 对黎曼 zeta 值多重推广的研究也逐渐引起了人们的注意.

1.2 多重 zeta 值及相关变形

最近三十多年来, 各类黎曼 zeta 值的多重级数推广在纽结理论、代数拓扑、代数几何、量子场论、费曼积分、粒子物理等数学与物理领域中被广泛应用 [21–23, 92, 93, 97, 120], 已成为数论领域关注的热点问题之一.

对于多重指标 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ 最经典的多变元 zeta 函数值是多重 zeta 值 (Multiple Zeta Value), 定义为

$$\zeta(\boldsymbol{k})=\zeta(k_1,\ldots,k_r):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}, \tag{1.2}$$

其中 $k_1,\ldots,k_r$ 均为正整数且 $k_r>1$ 是为了保证上述级数是收敛的, 这样的指标 $\boldsymbol{k}$ 我们称之为可容许的. 并且 $|\boldsymbol{k}|:=k_1+\cdots+k_r$ 和 r 分别称为多重 zeta 值的权 (或权重) 和深度. 显然, 多重 zeta 值是黎曼 zeta 值的自然多重推广. 对二重 zeta 值的研究最早可以追溯到 1742–1743 年的欧拉与哥德巴赫的交流信件 [48], 欧拉研究了二重 zeta 值的退化性及一些特殊值并提出了一些猜想公式. 此后, 高斯、Ramanujan、Berndt 等数学家也对二重 zeta 值进行过研究. 但一般认为, 对于多重 zeta 值系统的研究始于 1992 年 D. Zagier 在第一届欧洲数学会议上的报告 [137] 和著名组合数论专家 M. Hoffman 于 1992 年发表在 *Pacific Journal of Mathematics* (《太平洋数学杂志》) 上的文章 [73]. 他们几乎是同时从不同角度独立提出多重 zeta 值的定义和概念的: Zagier 是从算术代数几何角度对黎曼 zeta 值进行推广, 进而提出了多重 zeta 值的定义和概念; 而 Hoffman 则是从纯数论和组合学的角度对黎曼 zeta 值进行了推广, 从而提出了多重 zeta 值的定义和概念. 紧接着, 著名理论物理学家 Broadhurst 与 Kreimer[23] 在费曼图与纽结理论的研究中发现多重 zeta 值出人意料地出现在一些费曼积分以及纽结不变量的计算中, 从而极大地提高了人们对多重 zeta 值的关注.

三十多年来, 经过 F. Brown、P. Deligne、古庄英和 (H. Furusho)、M. Hoffman、井原健太郎 (K. Ihara)、金子昌信 (M. Kaneko)、川岛学 (G. Kawashima)、大野泰生 (Y. Ohno)、津村博文 (H. Tsumura)、寺杣友秀 (T. Terasoma)、山本修司 (S. Yamamoto)、D. Zagier、蔡天新、郭锂、李忠华、李江涛、沈忠燕、王伟平以及本文作者等人的工作, 人们发现并证明了多重 zeta 值间的许多优美的代数关系, 比如加权和公式 [100]、结合子关系 [49, 52]、Kawashima 关系 [85, 87]、Kaneko–Yamamoto 积分—级数关系 [86]、Ihara–Kaneko–Zagier 导子关系 [77]、Zagier 2-3-2 公式 [99, 138] 等, 对于这些关系的详细的历史背景和研究可参见 [142]. 而这些关系之间又存在着一定的内在联系, 参见图 2 (需要注意的是图 2 中的某些术语的定义在本文中并没有给出, 相关定义读者可参见 [142] 及其他相关文献, 限于本文篇幅, 我们在这里不作赘述). 当然, 除了图 2 中所展现的关系之外, 还存在许多其他的代数算术关系, 其中一些关系可参见 [18, 71, 72]. 这些工作基本上都是利用组合数论、解析数论或者代数几何的方法来完成的.

近些年来, 随着对多重 zeta 值研究的进一步深入及其在数学学科与物理学科许多领域中的应用, 一些与多重 zeta 值相关的积分和级数变形也被相应提出, 对这些变形 (特别是级数奇偶变形) 的研究也逐渐吸引了人们的注意和兴趣. 主要的变形有:

1. 荒川—金子 (Arakawa–Kaneko) zeta 函数 [3];
2. 非线性欧拉和 [51];
3. q- 模拟多重 zeta 值 (q-Analogues of MZV)[19, 142, 143];
4. 有限多重 zeta 值及其变形 [80, 82, 109, 124, 145, 146];
5. 函数域多重 zeta 值 [29−32, 39, 68, 121];
6. motivic 多重 zeta 值 [24, 25, 91, 95−97, 119];
7. 分圆多重 zeta 值 [136];
8. 金子—津村 (Kaneko–Tsumura) η- 函数 [83];
9. Schur 多重 zeta 值 [6, 9, 105];
10. 锥上多重 zeta 值 [62] 及 cell zeta 值 [26];

11. 多重 Apéry-zeta 级数 [1, 132] 等.

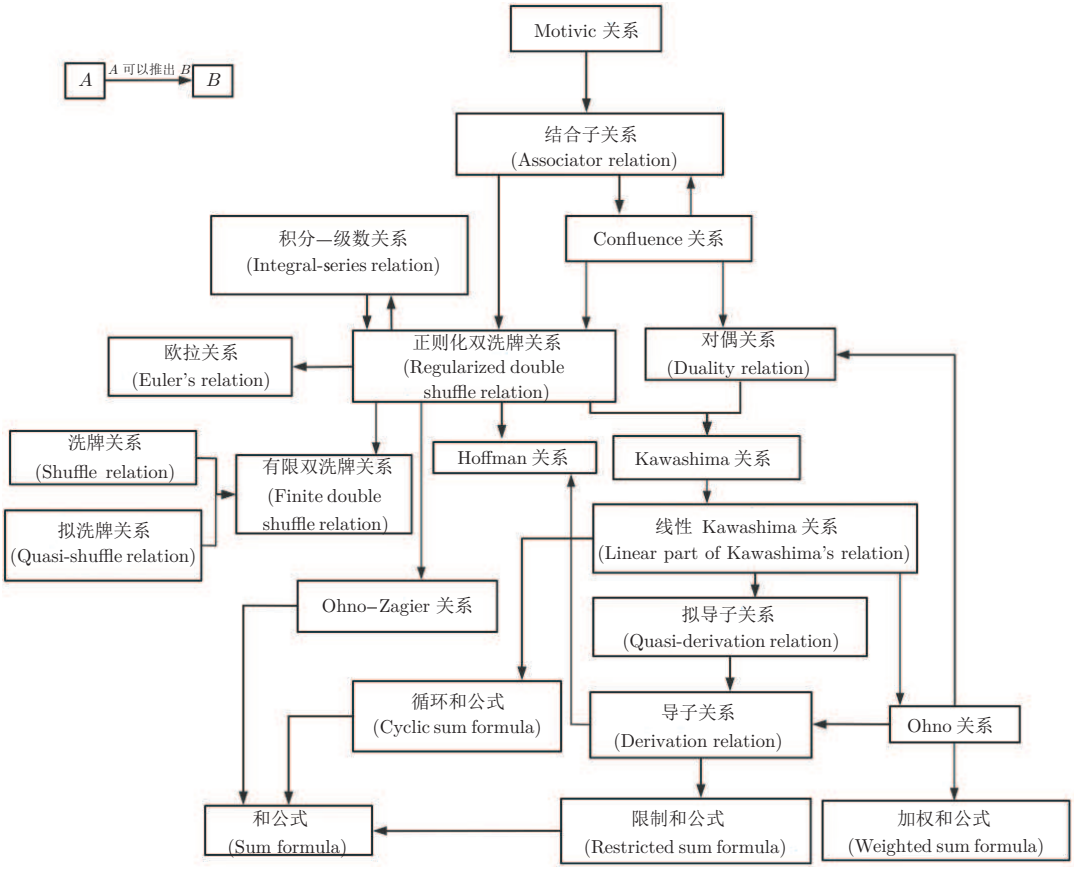

图 2 多重 zeta 值的各种算术代数关系

当然, 除了上述的变形之外, 还有许多其他类型的积分和级数变形. 特别是最近几年, 对多重 zeta 值的一些奇偶变形的研究逐渐吸引了人们的注意和兴趣. 2018 年, Hoffman[76] 首先考虑了多重 zeta 值的一类奇变形 —— 多重 t-zeta 值 (Multiple t-value). 对于可容许的多重指标 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$, 定义

$$t(\boldsymbol{k}):=\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r\\ n_j\ \text{odd}}}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}=\sum_{1\leq n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{(2n_1-1)^{k_1}\cdots(2n_r-1)^{k_r}}. \tag{1.3}$$

2019 年, 日本著名数论专家金子昌信与津村博文 [84] 开始研究多重 zeta 值的一类奇偶交错变形 —— 多重 T-zeta 值 (Multiple T-value, 简称 MTV):

$$T(\boldsymbol{k}):=\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r\\ n_j\equiv j \bmod 2}}\frac{2^r}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}. \tag{1.4}$$

2022 年, 本文作者 [129] 在结合了多重 t-zeta 值和多重 T-zeta 值的基础上引入并研究了更一般情形的奇偶变形 —— 多重混合 zeta 值, 也称多重 M-zeta 值 (Multiple M-value): 对 $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r=$

±1, 定义

$$M(\boldsymbol{k};\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{(1+\varepsilon_1(-1)^{n_1})\cdots(1+\varepsilon_r(-1)^{n_r})}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}. \tag{1.5}$$

我们还定义了多重 M-zeta 值的另一种特殊情形 —— 多重 S-zeta 值 (Multiple S-value):

$$S(\boldsymbol{k}):=\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r\\ n_j\equiv j-1 \bmod 2}}\frac{2^r}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}. \tag{1.6}$$

最近, 本文作者和同济大学的晏露博士 [128] 考虑了更一般情形的交错奇偶变形 —— 交错多重 M-zeta 值 (Alternating Multiple Mixed Value) :

$$M(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\varepsilon};\boldsymbol{\sigma}):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{(1+\varepsilon_1(-1)^{n_1})\sigma_1^{(2n_1+1-\varepsilon_1)/4}\cdots(1+\varepsilon_r(-1)^{n_r})\sigma_r^{(2n_r+1-\varepsilon_r)/4}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}, \tag{1.7}$$

其中 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{N}^r$, $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)\in\{\pm1\}^r$, $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\dots,\sigma_r)\in\{\pm1\}^r$ 且 $(k_r,\sigma_r)\neq(1,1)$. 相似地, 当 $\varepsilon_j=1,-1,(-1)^j,(-1)^{j-1}$ 时, 相应的交错 (Alternating) 多重 M-zeta 值就分别变成了欧拉和 (即交错多重 zeta 值)[16], 交错多重 t-zeta 值 [76], 交错多重 T-zeta 值 [133] 和交错多重 S-zeta 值 [128], 即有

$$\begin{aligned}&M(\boldsymbol{k};\{1\}_r;\boldsymbol{\sigma})=\frac{1}{2^{|\boldsymbol{k}|-r}}\zeta(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\sigma}),\quad M(\boldsymbol{k};-1,1,\dots,(-1)^r;\boldsymbol{\sigma})=T(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\sigma}),\\ &M(\boldsymbol{k};\{-1\}_r;\boldsymbol{\sigma})=t(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\sigma}),\quad M(\boldsymbol{k};1,-1,\dots,(-1)^{r-1};\boldsymbol{\sigma})=S(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\sigma}).\end{aligned}$$

这里 $\{a\}_r$ 代表数字 a 重复 r 次. 事实上, 2015 年, 美国华裔数论专家袁海平教授和本文第二作者 [136] 利用将求和指标限制在模 N 的同余类的方法系统定义并研究了以上多重 zeta 值奇偶变形的一般性推广, 这类推广和多重 Eisenstein 级数有着密切的联系.

另一种更广为人知的多重 zeta 值的推广就是分圆域上的第 N 层多重 zeta 值 (N 为正整数) —— 简称第 N 层分圆 (或彩色) 多重 zeta 值 (Cyclotomic/Colored Multiple Zeta Value, 简称 CMZV)[136], 定义为

$$\zeta(k_1,\dots,k_r;z_1,\dots,z_r):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{z_1^{n_1}\cdots z_r^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}, \tag{1.8}$$

其中 $k_1,\dots,k_r$ 均为正整数, $z_1,\dots,z_r$ 均为 N 次单位根且 $(k_r,z_r)\neq(1,1)$. 我们在第 3 节将会看到, 这些值与乘法群 $\mathbb{G}_m$ 挖去 N 次单位根的 motivic 基本群有着非常紧密的联系.

当 $N=2$ 时, $(z_1,\dots,z_r)\in\{\pm1\}^r$, 此时的第 2 层分圆多重 zeta 值一般被称为欧拉和 [16]. 为了更简便地表达欧拉和, 大家通常约定当 $\eta_j=-1$ 时, 在对应的指标 k_j 上加一杠, 例如

$$\zeta(\bar2,1,\bar3,5)=\zeta(2,1,3,5;-1,1,-1,1)=\sum_{0<n_1<n_2<n_3<n_4}\frac{(-1)^{n_1+n_3}}{n_1^2n_2n_3^3n_4^5}.$$

显然, 多重 M-zeta 值可以表示成一些欧拉和的 $\mathbb{Z}[i]$- 线性组合, 而欧拉和又是分圆多重 zeta 值的一类特殊情形, 因此, 这些多重值之间是存在一定的包含关系的. 例如, 对于多重 t-zeta 值和多重 T-zeta 值, 有

$$t(\boldsymbol{k})=\sum_{\sigma_j=\pm1}\left(\prod_{j=1}^r\sigma_j\right)\zeta(\boldsymbol{k};\sigma_1,\dots,\sigma_r),\quad T(\boldsymbol{k})=\sum_{\sigma_j=\pm1}\left(\prod_{j=1}^r\sigma_j^j\right)\zeta(\boldsymbol{k};\sigma_1,\dots,\sigma_r).$$

类似地, 交错多重 M-zeta 值可以写成 $N=4$ 的分圆多重 zeta 值的 $\mathbb{Z}[i]$- 线性组合. 因为这些多重 zeta 值变形的定义刚提出不久, 所以对它们的算术代数等相关性质的研究工作是非常少的, 最近的一些研究结果可参见 [76, 84, 101, 103, 118, 129, 141]. 值得注意的是, 在最近的研究中发现, 分圆多重 zeta 值与 Apéry 级数及其推广存在着非常密切的联系. 比如, 印度数学家 P. Akhilesh[1] 定义了如下形式的多重 Apéry-zeta 级数

$$\sigma(k_1,\ldots,k_r):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\binom{2n_r}{n_r}^{-1}, \tag{1.9}$$

其中 $k_1,\ldots,k_r$ 均为正整数. 他证明了多重 zeta 值 $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ 都可以表示成多重 Apéry-zeta 级数 $\sigma(k_1,\ldots,k_r)$ 的整系数线性组合, 并且建立了多重 zeta 值与多重 Apéry-zeta 级数的新的累次积分公式, 进一步给出了多重 zeta 值的 Zagier 2-3-2 公式 [138] 的一个新的简短证明. 本文第一作者与浙江理工大学的王伟平教授 [125] 则发现了一些如下形式的多重 Apéry 级数

$$\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{4^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\binom{2n_r}{n_r}^{-1},\quad \sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{4^{-n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\binom{2n_r}{n_r}$$

可以写成一些欧拉和的整系数线性组合.

因为这些多重 zeta 值变形的定义刚提出不久, 对多重 Apéry 级数、(交错) 多重 t-zeta 值、(交错) 多重 T-zeta 值、(交错) 多重 S-zeta 值和 (交错) 多重 M-zeta 值的研究是非常少的, 所以可以做的问题非常多. 其中比较受关注的主要有三类问题. 第一类问题是它们各自所满足的各种算术代数关系间的联系. 该问题就是这些值各自所满足的算术代数关系式之间是否可以互相推导, 比如, 2018 年金子昌信和山本修司 [86] 证明了多重 zeta 值的正则化双洗牌关系与积分一级数关系是等价的. 图 2 中给出了多重 zeta 值的一些算术代数关系的推导图. 第二类问题是它们各自的全体所张成的实数域有理子向量空间的空间结构问题. 其中, 最主要的问题是研究由各类变形值各自生成的有理向量空间的维数和具体的基底. 第三类问题是多重 zeta 值的各种变形之间的联系. 特别是它们之间是否存在一些算术代数关系, 比如, 金子昌信和津村博文 [84] 就猜测了所有的多重 t-zeta 值 $t(k_1,\ldots,k_r)$ $(k_j\geq 2)$ 可以表示成多重 zeta 值的 $\mathbb{Q}$- 线性组合. 2022 年, 村上拓也 (T. Murakami)[103] 利用 C. Glanois[55] 发展的 motivic 方法证明了这个猜想. 我们将在第 2 节和第 3 节具体讨论多重 zeta 值的算术代数关系与几何性质.

2 多重 zeta 值及相关变形的算术代数关系与几何性质

本节将阐述多重 zeta 值及相关变形的一些主要的算术代数关系和几何性质.

2.1 算术代数关系

2.1.1 正则化双洗牌代数关系

这是一类多重 zeta 值之间最为重要的 $\mathbb{Q}$- 线性关系. 首先, M. Kontsevich 和 D. Zagier[137] 利用陈 (国才) 氏累次积分方法得到了多重 zeta 值的一种累次积分表达式

$$\zeta(k_1,\ldots,k_r)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1-t}\left(\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{k_1-1}\cdots\frac{\mathrm{d}t}{1-t}\left(\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{k_r-1}, \tag{2.1}$$

这里, 陈氏累次积分 [34, 35] 定义如下:

$$\int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t f_2(t)\mathrm{d}t\cdots f_p(t)\mathrm{d}t:=\int_{a<t_1<\cdots<t_p<b}f_1(t_1)f_2(t_2)\cdots f_p(t_p)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_p,$$

该积分满足如下的洗牌关系: 对任意的 $[0,1]$ 上的微分 1- 形式 (1-form) $\omega_1,\dots,\omega_{r+s}$, 有

$$\int_0^1 \omega_1\cdots\omega_r\int_0^1 \omega_{r+1}\cdots\omega_{r+s}=\int_0^1 \omega_1\cdots\omega_r\sqcup\!\sqcup\omega_{r+1}\cdots\omega_{r+s},$$

这里 $\sqcup\!\sqcup$ 代表洗牌积: 每个 1- 形式都可以想象成一张牌, 洗牌积则表示将两副牌洗成一副牌的所有可能组合. 例如, 若令 $\mathtt{a}=\frac{\mathrm{d}t}{t},\mathtt{b}=\frac{\mathrm{d}t}{1-t}$, 则由 (2.1) 可以得到

$$\zeta(2)\zeta(3)=\int_0^1 \mathtt{ba}\sqcup\!\sqcup\mathtt{ba}^2=6\int_0^1 \mathtt{b}^2\mathtt{a}^3+3\int_0^1 \mathtt{baba}^2+\int_0^1 \mathtt{ba}^2\mathtt{ba}=6\zeta(1,4)+3\zeta(2,3)+\zeta(3,2).$$

这种关系称为多重 zeta 值之间的洗牌关系. 相似地, 金子昌信和津村博文 [84, 定理 3.1] 发现了多重 T-zeta 值的累次积分表达式

$$T(k_1,\dots,k_r)=\int_0^1\frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{k_1-1}\cdots\frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{k_r-1},\tag{2.2}$$

所以, 多重 T-zeta 值同样满足洗牌关系.

另外, 根据多重 zeta 值的定义 (1.2) 容易得到另外一种拟洗牌关系 (或称调和洗牌关系). 例如

$$\zeta(2)\zeta(3)=\sum_{m\geq1}\frac{1}{m^2}\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^3}=\sum_{0<m<n}\frac{1}{m^2n^3}+\sum_{0<m<n}\frac{1}{m^2n^3}+\sum_{0<m=n}\frac{1}{m^2n^3}=\zeta(2,3)+\zeta(3,2)+\zeta(5).$$

把上面两种关系结合起来便得到了如下的一个有限双洗牌关系

$$\zeta(5)=6\zeta(1,4)+2\zeta(2,3).$$

人们自然会问: 是否多重 zeta 值之间所有的 $\mathbb{Q}$- 线性关系都可以从有限双洗牌关系来得到? 从 (2.5) 可以立即看出答案是否定的, 因为多重 zeta 值的权至少是 2, 所以乘积的权至少是 4. 井原健太郎、金子昌信和 Zagier[77] 通过形式化地引入发散多重 zeta 值巧妙地解决了这个问题. 实际上, 所有发散多重 zeta 值均可通过两种不同的正则化方法表示成 $\mathbb{Q}[T]$ 中的多项式.

(1) 洗牌关系正则化: 第一种方法是先取 $0<\varepsilon<1$, 再将 (2.1) 变为 $(0,1-\varepsilon)$ 上的积分, 从而可将其延拓到发散的多重 zeta 值. 可以证明, 若假定 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^r$ 以 d 个 1 结尾, 当 $\varepsilon\to0^+$ 时

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t}{1-t}\left(\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{k_1-1}\cdots\frac{\mathrm{d}t}{1-t}\left(\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{k_r-1}$$

的主项可表示成 $T=-\log\varepsilon$ 的 d 次多项式, 记作 $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\boldsymbol{k})=\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(\boldsymbol{k};T)$, 并称其为 $\zeta(\boldsymbol{k})$ 的洗牌正则化值. 特别地, $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1)=T$.

(2) 拟洗牌关系正则化: 第二种方法是将 (1.2) 的求和指标限制在 $[1,M]\cap\mathbb{N}$ 内, 从而对任意的发散值 (1.2) 都有定义. 可以证明, 若假定 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^r$ 以 d 个 1 结尾, 当 $M\to\infty$ 时

$$\sum_{0<n_1<\cdots<n_r\leq M}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

的主项都能表示成 $T=\log M$ 的 d 次多项式, 记作 $\zeta_*(\boldsymbol{k})=\zeta_*(\boldsymbol{k};T)$, 并称其为 $\zeta(\boldsymbol{k})$ 的拟洗牌正则化值. 特别地, $\zeta_*(1)=T$.

下面的结果将两种不同的正则化值有机地联系起来, 从而给出了所谓的多重 zeta 值的正则化双洗牌关系 [77, 定理 1]:

定理 2.1 定义一个 $\mathbb{R}[T]$ 上的 $\mathbb{R}$- 线性同构映射 $\rho:\mathbb{R}[T]\to\mathbb{R}[T]$ 如下:

$$\rho(\exp(Tu))=\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)u^n\right)\exp(Tu),$$

则对任意的 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d$, 我们有

$$\zeta_{ш}(\boldsymbol{k};T)=\rho\big(\zeta_*(\boldsymbol{k};T)\big). \tag{2.3}$$

下述猜想显示了定理 2.1 的重要性.

猜想 2.1 多重 zeta 值的正则化双洗牌关系可以生成多重 zeta 值之间所有的 $\mathbb{Q}$- 线性关系.

2.1.2 对偶关系

可容许的多重指标 $\boldsymbol{k}:=(k_1,\dots,k_r)$ $(k_1\geq 2)$ 可以唯一写成如下形式:

$$\boldsymbol{k}=(\{1\}_{b_1-1},a_1+1,\dots,\{1\}_{b_s-1},a_s+1),$$

其中 $a_j,b_j\in\mathbb{N}$. 定义 $\boldsymbol{k}$ 的对偶指标 $\boldsymbol{k}^*$ 为

$$\boldsymbol{k}^*=(\{1\}_{a_s-1},b_s+1,\dots,\{1\}_{a_1-1},b_1+1).$$

利用 (2.1) 和 (2.2) 分别做变量代换 $t\mapsto 1-t$ 和 $t\mapsto\frac{1-t}{1+t}$ 可得多重 zeta 值和多重 T-zeta 值的对偶公式.

定理 2.2 对于可容许的多重指标 $\boldsymbol{k}$ 及其对偶指标 $\boldsymbol{k}^*$, 有恒等式

$$\zeta(\boldsymbol{k})=\zeta(\boldsymbol{k}^*)\quad\text{和}\quad T(\boldsymbol{k})=T(\boldsymbol{k}^*). \tag{2.4}$$

例如

$$s=1,\ b_1=2,\ a_1=1\Longrightarrow\zeta(1,2)=\zeta(3). \tag{2.5}$$

当然, 多重 zeta 值的某些其他变形也是存在对偶公式的, 但形式上可能更为复杂, 比如本文作者 [133, 定理 2.1] 发现了交错多重 T-zeta 值也存在一个对偶公式.

2.1.3 和公式

1742–1743 年, 在写给哥德巴赫的通信中, 欧拉证明了二重 zeta 值的一个和公式

$$\sum_{\substack{i+j=k\\ i\geq 1,\,j\geq 2}}\zeta(i,j)=\zeta(k)\quad(k\geq 3).$$

1997 年, Granville[56] 和 Zagier (用生成函数方法, 参见 [144]) 各自独立地证明了一般形式的多重 zeta 值的和公式

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k\\ k_i\geq 1,\,k_r\geq 2}}\zeta(k_1,\dots,k_r)=\zeta(k)\quad(k\geq 2).$$

有趣的是, Zagier 当年没有发表他的证明, 因为他觉得, 相对于如此简洁的和公式, 他的证明太长了 [56, 第 95 页]; 但后来有学者发现他的方法可以进一步推广到欧拉和的研究上 [144], 而 Granville 的简短证明却并不容易推广.

此后, 许多学者也给出了一些不同的证明方法以及其他类型的和公式, 如: 限制和公式、(多项式) 加权和公式、循环和公式等, 对于限制和公式来说, 中国台湾的一些学者 (如余文卿、陈光武、钟展良等) 进行过非常深入的研究 [36−38]. 其中比较重要的和公式有著名代数学家美国罗格斯大学郭锂教授和华东师范大学谢兵永教授 [63] 的加权和公式

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k\\ k_i\geq 1,\, k_r\geq 2}}\left[2^{k_r-1}+\left(2^{k_r-1}-1\right)\left(2^{s_2}+\sum_{i=2}^{r-1}2^{s_i}\right)\right]\zeta(k_1,\ldots,k_r)=k\zeta(k),$$

其中 $s_i=k_i+\cdots+k_{r-1}-r+i$ $(1<i<r)$. 定义 $\boldsymbol{k}$ 的高度为大于 1 的分量个数, 记为 $\mathrm{h}(\boldsymbol{k})$, 日本数论专家大野泰生和 Zagier[107] 证明了如下结果: 对任意非负整数 w, d 和 h, 令

$$I_0(w,d,h)=\left\{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d:|\boldsymbol{k}|=w,\mathrm{h}(\boldsymbol{k})=h,k_r\geq 2\right\}.$$

记 $S_n(x,y,z)=x^n+y^n-\alpha^n-\beta^n$, $\alpha,\beta=\frac{x+y\pm\sqrt{(x+y)^2-4z}}{2}$, 则

$$\sum_{w,d,h\geq 1}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(w,d,h)}\zeta(\boldsymbol{k})\right)x^{w-d-h}y^{d-h}z^{h-1}=\frac{1-\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n}S_n(x,y,z)\right)}{xy-z}.$$

后来, 同济大学李忠华教授 [98] 将此结果推广到固定 i- 高度的情形, 这里 $\boldsymbol{k}$ 的 i- 高度为大于 i 的分量个数.

三十多年来, 多重 zeta 值的和公式的研究结果是非常丰富的, 比如, 对于正整数 m,k,r 且 $k\geq r$, 令 $f(x_1,\ldots,x_r)$ 为一个有理系数对称多项式, 定义加权和

$$E_f(2m,k,r):=\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k,\\ k_1,\ldots,k_r\geq 1}}f(k_1,\ldots,k_r)\zeta(2mk_1,\ldots,2mk_r),\tag{2.6}$$

当 f 为常数 1 时, 约定符号 $E(2m,k,r)\equiv E_f(2m,k,r)$. 2006 年, Gangl、金子昌信和 Zagier[53] 证明了 $E(2,k,2)=\frac{3}{4}\zeta(2k)$. 之后, 中村隆志 (T. Nakamura)[104] 给出了 $E(2,k,2)$ 公式的另一个证明. 2012 年, 浙江外国语学院沈忠燕教授和浙江大学蔡天新教授 [112] 研究了 $E(2,k,3)$ 和 $E(2,k,4)$, 并证明了这两个和公式都可以表示成 $\zeta(2k)$ 和 $\zeta(2)\zeta(2k-2)$ 的有理组合. 类似结果已被推广到欧拉和 [113] 和多重 t-zeta 值 [114] 上. 而后, Hoffman[75] 和 Genčev[54] 利用其他方法给出了 $E(2,k,r)$ 的显式公式. 此外, Genčev[54] 还猜测了 $E(4,k,r)$ 的公式. 小森安志 (Y. Komori)、松本耕二 (K. Matsumoto) 和津村博文 [88] 则考虑了更一般情形的加权和 $E(2m,k,r)$, 显式公式已在 [46, 47] 中给出.

2015 年, 郭锂教授、兰州大学雷鹏教授和本文第二作者 [61] 对一般多项式 f 提出如下猜想:

$$E_f(2,k,r)=\sum_{l=0}^{T}a_{f,l}(k)\zeta(2l)\zeta(2k-2l),\tag{2.7}$$

其中 $T=\max\{\frac{[d+r-2]}{2},[\frac{r-1}{2}]\}$, $d=\deg(f)$, $a_{f,l}(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 是只依赖于 l 和 f 的有理函数且 $\deg a_{f,l}(x)\leq\deg_{x_1}f(x_1,\ldots,x_r)$. 2019 年, 李忠华教授与秦臣硕士 [100] 利用生成函数方法以及

建立多个黎曼 zeta 值的乘积的和公式证明了上述猜想及其带星版本. 这里的多重 zeta 星值定义如下:

$$\zeta^\star(\boldsymbol{k})\equiv\zeta^\star(k_1,\dots,k_r):=\sum_{1\leq n_1\leq\cdots\leq n_r}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}.$$

2020 年, 李忠华与本文第一作者 [101] 合作建立了多重 t-zeta 值及相应的多重 t- 星值的对称多项式加权和公式 (即证明了任意深度且所有参量均为偶数时的多重 t-zeta 值及相应的多重 t-星值的多项式加权和公式可以写成两个黎曼 zeta 值的乘积组合).

定理 2.3[101] 若正整数 k,r 满足 $k\geq r$ 而 $f(x_1,\dots,x_r)$ 是一个有理系数对称多项式, 则

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k\\ k_1,\dots,k_r\geq 1}}f(k_1,\dots,k_r)t(2k_1,\dots,2k_r)=\sum_{l=0}^{T}c_{f,l}(k)\zeta(2l)t(2k-2l),\tag{2.8}$$

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k\\ k_1,\dots,k_r\geq 1}}f(k_1,\dots,k_r)t^\star(2k_1,\dots,2k_r)=\sum_{l=0}^{T}c^\star_{f,l}(k)\zeta(2l)t(2k-2l),\tag{2.9}$$

其中 $T=\max\{\frac{[d+r-2]}{2},[\frac{r-1}{2}]\}$, $d=\deg(f)$, $c_{f,l}(x),c^\star_{f,l}(x)\in\mathbb{Q}(x)$ 是只依赖于 l 和 f 的有理函数, 并且

$$\deg(c_{f,l}(x)),\ \deg(c^\star_{f,l}(x))\leq d+r-2l-1,$$

这里对于可容许的多重指标 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$, 多重 t- 星值定义为

$$t^\star(\boldsymbol{k})\equiv t^\star(k_1,\dots,k_r):=\sum_{1\leq n_1\leq\cdots\leq n_r}\frac{1}{(2n_1-1)^{k_1}\cdots(2n_r-1)^{k_r}}.$$

另外, 2019 年本文第一作者在日本九州大学留学期间的一次多重 zeta 值讨论班上汇报定理 2.3 时, 金子昌信教授提出了如下问题 (目前该问题似乎仍然是公开的):

问题 2.1 若正整数 m,k,n 满足 $k\geq n$ 而 $f(x_1,\dots,x_n)$ 是一个有理系数对称多项式, 下列四个一般情形的多项式加权和 $(F=\zeta,\zeta^\star,t,t^\star)$

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=k\\ k_1,\dots,k_n\geq 1}}f(k_1,\dots,k_n)F(2mk_1,\dots,2mk_n)$$

是否存在类似定理 2.3 的公式?

对于多重 T-zeta 值、多重 S-zeta 值及多重 M-zeta 值等其他多重 zeta 值的变形, 其和公式的一些研究结果可参见文献 [12, 84, 118] 以及本文第二作者的综述文章 [144]. 比如, 金子昌信和津村博文 [84, 猜想 4.5] 提出了一个三重 T-zeta 值的猜想公式

$$\sum_{\substack{a+b+c=w\\ a,b\geq 1,\,c\geq 2}}2^b(3^{c-1}-1)T(a,b,c)=\frac{2}{3}(w-1)(w-2)T(w)\quad(w\geq 4).$$

该猜想于 2023 年被本文作者及其合作者 [12] 利用欧拉和的正则化双洗牌代数关系证明.

2.1.4 奇偶性

旅居加拿大的苏格兰裔数学家 J. Borwein 和德国数学家 R. Girgensohn[17] 提出了如下多重 zeta 值的奇偶性猜想:

猜想 2.2[17] 对于可容许的多重指标 $\boldsymbol{k}$, 当权 $|\boldsymbol{k}|$ 和深度 r 的奇偶性不相同时, $\zeta(\boldsymbol{k})$ 可以表示成深度小于 r 的多重 zeta 值的组合.

值得一提的是, J. Borwein 和他的兄弟 P. Borwein 都非常热衷于实验数学, 他们共同创建了加拿大的实验和构造数学中心. 本文作者的数学研究多年得益于他们的公开计算机程序 EZ-face (见 http://wayback.cecm.sfu.ca/cgi-bin/EZFace/zetaform.cgi), 此程序大大方便了多重 zeta 值及欧拉和的数值计算.

津村博文 [122] 在 2004 年证明了多重 zeta 值的奇偶性猜想 2.2. 2017 年, E. Panzer[110, 定理 1.3] 则证明了多重多对数函数的奇偶性定理. 对于 $(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{N}^r$, r 变量的多重多对数函数 (multiple polylogarithm function) 定义如下:

$$\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(x_1,\dots,x_r):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\quad(|x_j\cdots x_r|<1,\ j=1,2,\dots,r).$$

定理 2.4[110] 若 $d\in\mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{n}=(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{N}^d$, 则函数

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{n}}(z_1,z_2,\dots,z_r)-(-1)^{n_1+\cdots+n_r-r}\mathrm{Li}_{\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2},\dots,\frac{1}{z_r}\right)$$

的最大深度为 $r-1$, 即其可以表示成

$$(2\pi\mathrm{i})^{k_0}\prod_{i=1}^{r}\log^{k_i}(-z_i\cdots z_r)\prod_{i=1}^{s}\mathrm{Li}_{\boldsymbol{n}^{(i)}}(\boldsymbol{z}^{(i)})$$

的 $\mathbb{Q}$- 线性组合, 这里序列 $\boldsymbol{n}^{(i)}\in\mathbb{N}^{d_i}$ 且总深度 $d_1+\cdots+d_s<r$, 并保持权 $|\boldsymbol{k}|+\sum_{i=1}^{s}|\boldsymbol{n}^{(i)}|=|\boldsymbol{n}|$, $\boldsymbol{z}^{(i)}$ 的每个分量 $z_j^{(i)}$ 都是某个连续的乘积 $z_\mu z_{\mu+1}\cdots z_\nu$ $(\mu<\nu)$.

2020 年, 金子昌信和津村博文 [84, 定理 3.4] 给出了多重 T-zeta 值的奇偶性定理.

定理 2.5[84] 设正整数 $r\geq 2$, $\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^r$ 为可容许的多重指标. 当权 $|\boldsymbol{k}|$ 和深度 r 奇偶性不相同时, 多重 T-zeta 值 $T(\boldsymbol{k})$ 可以表示成深度小于 r 的多重 T-zeta 值的组合.

2022 年, 本文作者利用定理 2.4 证明了多重 M-zeta 值的奇偶性定理.

定理 2.6[129, 定理 2.16] 设正整数 $r\geq 2$, $\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^r$ 为可容许的多重指标, 且 $\boldsymbol{\varepsilon}\in\{\pm1\}^r$. 当权 $|\boldsymbol{k}|$ 和深度 r 奇偶性不相同时, 多重 M-zeta 值 $M(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\varepsilon})$ 可以表示成深度小于 r 的多重 M-zeta 值的组合.

2024 年, 本文作者提出了关于交错多重 M-zeta 的奇偶性猜想 [133, 猜想 4.8], 最近本文作者与同济大学的晏露博士 [128, 定理 3.10] 利用 Panzer 关于多重多对数函数的奇偶性定理 2.4 证明了此猜想.

2.2 几何性质

令 $\mathbf{MZV},\mathbf{MtV},\mathbf{MTV},\mathbf{MSV},\mathbf{MMV},\mathbf{AMZV}$ 分别为由所有多重 zeta 值、多重 t-zeta 值、多重 T-zeta 值、多重 S-zeta 值、多重 M-zeta 值、欧拉和张成的 $\mathbb{Q}$- 线性空间, 而加上下标 w 表示由权为 w 的值张成的 $\mathbb{Q}$- 线性空间, 即

$$\mathbf{MZV}:=\sum_{w=0}^{\infty}\mathbf{MZV}_w,\quad \mathbf{MtV}:=\sum_{w=0}^{\infty}\mathbf{MtV}_w,\quad \mathbf{MTV}:=\sum_{w=0}^{\infty}\mathbf{MTV}_w,$$

$$\mathbf{MSV} := \sum_{w=0}^{\infty} \mathbf{MSV}_w, \quad \mathbf{MMV} := \sum_{w=0}^{\infty} \mathbf{MMV}_w, \quad \mathbf{AMZV} := \sum_{w=0}^{\infty} \mathbf{AMZV}_w,$$

其中下标为 0 时所有的空间均为 $\mathbb{Q}$. 让 $\mathbf{MMVe}_w$ 和 $\mathbf{MMVo}_w$ 分别定义为权 w 且在 (1.5) 中 $\varepsilon_1 = 1$ 的所有多重 M-zeta 值及权为 w, 且在 (1.5) 中 $\varepsilon_1 = -1$ 的所有多重 M-zeta 值所张成的 $\mathbb{Q}$- 线性空间.

类似地, 令 $\mathbf{AMtV}, \mathbf{AMTV}, \mathbf{AMSV}, \mathbf{AMMV}, \mathbf{CMZV}$ 分别为由所有交错多重 t-zeta 值、交错多重 T-zeta 值、交错多重 S-zeta 值、交错多重 M-zeta 值、分圆多重 zeta 值张成的 $\mathbb{Q}$- 线性空间, 而加上下标 w 表示由权为 w 的值张成的 $\mathbb{Q}$- 线性空间, 即

$$\mathbf{AMtV} := \sum_{w=0}^{\infty} \mathbf{AMtV}_w, \quad \mathbf{AMTV} := \sum_{w=0}^{\infty} \mathbf{AMTV}_w, \quad \mathbf{AMSV} := \sum_{w=0}^{\infty} \mathbf{AMSV}_w,$$

$$\mathbf{AMMV} := \sum_{w=0}^{\infty} \mathbf{AMMV}_w, \quad \mathbf{CMZV} := \sum_{w=0}^{\infty} \mathbf{CMZV}_w.$$

根据定义, 容易发现分圆多重 zeta 值的各种子空间存在着如下图 3 所示的包含关系:

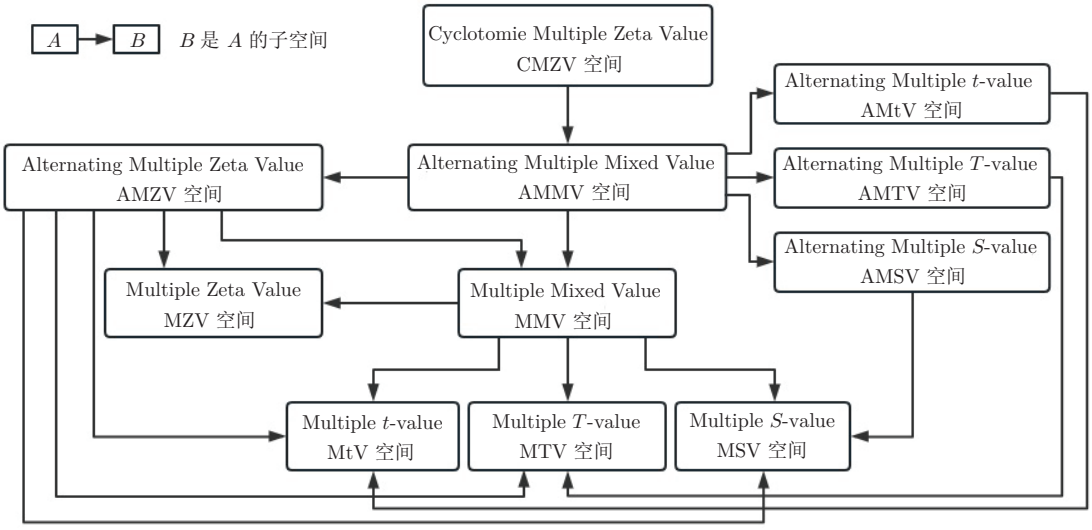

图 3 (交错) 多重混合 zeta 值的各种子空间关系

人们可以利用 PSLQ 算法和 GP-Pari 程序计算一些低权的分圆多重 zeta 值的各种子空间的基底和维数值, 比如, 本文作者利用 GP-Pari 程序计算了权 $w \leq 13$ 时所有的多重 zeta 值及其各种奇偶变形所张成的 $\mathbb{Q}$- 线性空间的维数值, 以及权 $w \leq 8$ 时所有的交错多重 zeta 值及其各种奇偶变形张成的 $\mathbb{Q}$- 线性空间的维数值, 见表 1 及表 2.

表 1 多重 zeta 值各种奇偶变形所张成的有理空间的基底维数

w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{MtV}_w$	1	0	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{MTV}_w$	1	0	1	1	2	2	4	5	9	10	19	23	42	49
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{MSV}_w$	1	0	1	2	3	4	6	10	15	22	32	52	76	?
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{MMV}_w$	1	0	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143	232	376
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{MMVe}_w$	1	0	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143	232	376
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{MMVo}_w$	1	0	1	2	4	6	10	16	27	44	73	120	198	?

表 2 交错多重 M-zeta 值的各种变形在 $\mathbb{Q}$ 上所张成空间的基底维数

w	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{AMZV}_w$	1	1	2	3	5	8	13	21	34
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{AMtV}_w$	1	1	3	6	12	24	48	96	192
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{AMSV}_w$	1	1	3	6	12	22	42	80	156
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{AMTV}_w$	1	1	2	4	7	13	24	44	81

通过对所得维数值与基底的进行分析, 人们提出了一些关于分圆多重 zeta 值的各种子空间的基底猜想和维数猜想. 例如, 1994 年, Zagier[137] 提出了如下维数猜想:

$$\sum_{w=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{MZV}_w t^w = \frac{1}{1-t^2-t^3}.$$

寺杣友秀 [119] 在 2002 年及 Deligne 与 Goncharov[43] 在 2005 年用不同方法证明了 Zagier 猜想的多重 zeta 值的空间维数值确实是维数的上界. 1997 年, Hoffman[74] 进一步给出了所有多重 zeta 值张成的 $\mathbb{Q}$- 向量空间的一组线性猜想基

$$\{\zeta(\boldsymbol{k}) \,|\, \boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r),\, r\geq 1,\, k_i\in\{2,3\}\}. \tag{2.10}$$

Brown[24] 在 2012 年利用 motivic 方法证明了在 motivic 空间中上述猜想是成立的, 见定理 3.1. 2020 年, 金子昌信和津村博文 [84] 则猜测满足如下形式的多重 t-zeta 值的乘积集合

$$\big\{t(2)^n t(k_1,\dots,k_r) \,|\, n,r\geq 0,\, k_i \text{ 为奇数}, k_i\geq 3,\, 2n+k_1+\cdots+k_r=w\big\}$$

也是权为 w 的所有多重 zeta 值所张成的向量空间的一组基底.

根据欧拉和以及各种多重 zeta 值的奇偶变形的定义, 金子昌信、津村博文、Hoffman 和本文作者等人猜测它们各自所构成的有理向量空间应该存在图 4 所示的包含关系.

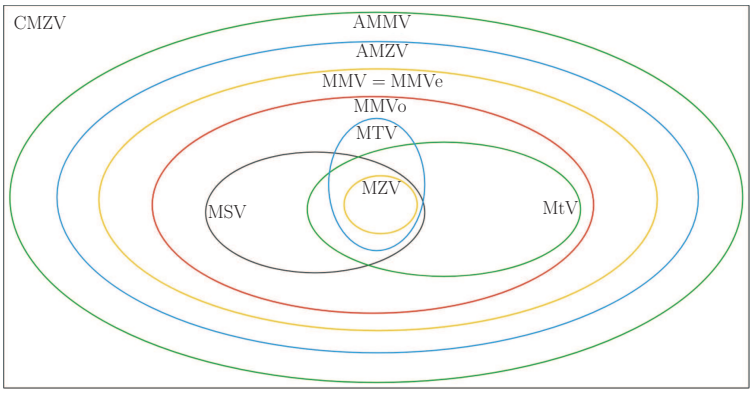

图 4 猜测的多重 zeta 值各种变形所构成的有理向量空间之间的关系

3 多重 zeta 值及相关变形与 motive 理论

3.1 Motive 与 motivic 累次积分

20 世纪 60 年代, 在研究代数簇的算术性质过程中, 法国数学家菲尔兹奖获得者、现代代数几何奠基人之一 A. Grothendieck 首先提出了 motive 的概念. 他认为对任意域 K 上的代数簇

X 应该存在一个他称为 motive 的结构 $M(X)$, 使得 X 的任意的上同调群均为 $M(X)$ 的同态像. 并且他对于光滑代数簇给出了具体的构造, 现今称之为纯 motive. 20 世纪末至 21 世纪初, 日本数学家花村昌树 (M. Hanamura) [66−67]、美国数学家 M. Levine[94] 和旅美俄国数学家菲尔兹奖获得者 V. Voevodsky[123] 用不同的构造方法证明了当 K 为特征为 0 的域时所有的 motive 生成一个三角范畴 $DM(K)$. 事实上他们的构造不尽相同, 但在大多数的情形 (包括数域) 被证明均等价.

回到纯 motive, 目前所知的最简单情形是对应于 $H^2(\mathbb{P}^1)$ 的 motive $\mathbb{Q}(-1)$ 及其张量幂 $\mathbb{Q}(-n) = \mathbb{Q}(-1)^{\otimes n}$ 和它的逆 $\mathbb{Q}(n)$, 这些最基本的 motive 称为纯 Tate motive. 而纯 Tate motive 经过反复扩充就得到了混合 Tate motive. 这里 "用 A 扩充 B 来得到 E" 指的是三角范畴中的一个正合三角

$$A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow A[-1].$$

在 motive 理论发展过程中, 旅美比利时数学家菲尔兹奖获得者 P. Deligne 在 20 世纪 80 年代的工作 [41] 尤为关键. 作为 Grothendieck 的学生, 他把高度抽象的现代代数几何理论具体化. 对于数域 K 上任意 motive M, 他构造了一系列 M 的具体实现并给出了这些实现之间的关系. 其中最为重要的两个实现 $\omega_{\mathrm{dR}}(M)$ (de Rham 实现) 和 $\omega_{\mathrm{B}}(M)$ (Betti 实现) 两者之间的同构映射就给出了 M 的 motivic 周期. 特别地, 当 $K = \mathbb{Q}$ 时, 这个周期便成为如下环中的一元,

$$\mathcal{P}^{\mathfrak{m}}_{DM(\mathbb{Q})} := \mathcal{O}(\mathrm{Isom}_{DM(\mathbb{Q})}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}})).$$

也就是说, M 的 motivic 周期是从 ω_{dR} 到 ω_{B} (在张量范畴内) 的所有同构所形成的 torsor 的仿射环中的一个元素. 再由经典的比较同构

$$\omega_{\mathrm{dR}}(M)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathrm{B}}(M)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$$

便得到了极其重要的周期同态

$$\mathrm{per} : \mathcal{P}^{\mathfrak{m}}_{DM(\mathbb{Q})} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

下面的 Grothendieck 周期猜想成为研究各种各样的多重 zeta 值及其变形的关键.

猜想 3.1 映射 per 是一个环同构.

这里提到的周期 (period) 的概念是由菲尔兹奖获得者 Kontsevich 和他的博士导师 Zagier[89] 最早引入的. 简单地说, 一个周期就是一个积分 $\int_\Delta \omega$, 其中 ω 是代数函数, 而 Δ 是代数域. 进一步, 每个周期都可以拆解为如下形式的积分的 $\mathbb{Q}$- 线性组合: $\int_\Delta \omega$, 其中 ω 是有理函数, 而 Δ 是由有理系数多项式的不等式在 $\mathbb{R}^n$ 中定义的区域. 用 $\mathcal{MT}(K)$ 代表 $DM(K)$ 中所有混合 Tate motive 生成的子范畴, 用 $\mathcal{P}(K)$ 来代表所有混合 Tate motive 的 motivic 周期. 旅美俄国数学家、本文第二作者的博士导师 A. Goncharov 有如下的猜想:

猜想 3.2 若 K 为数域则 $\mathcal{P}(K)$ 由 $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} \cup K$ 上的 motivic 累次 (iterated) 积分生成.

什么是 motivic 累次积分呢? 对于任意 $S \subset \{\infty\} \cup K$, 任取 $a_0, \ldots, a_{n+1} \in S$ 使得 $a_0 \neq a_1$, $a_n \neq a_{n+1}$, 再取从 a_0 到 a_{n+1} 在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty, a_1, \ldots, a_n\}$ 中的一个路径 γ, 则可定义累次积分如下:

$$I_\gamma(a_0; a_1, \ldots, a_n; a_{n+1}) := \int_{0<t_1<\cdots<t_n<1} \prod_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\gamma(t_j)}{\gamma(t_j) - a_j} \in \mathbb{C}.$$

为方便起见, 称 n 为 I_γ 的权而 $\mathrm{dep}(a_1, \ldots, a_n) := \#\{1 \leq j \leq n \,|\, a_j \neq 0\}$ 则称为深度. 事实上, 利用切基点 (tangential base point) 理论 [41], 甚至可以允许 $a_0 = a_1$ 及 $a_n = a_{n+1}$. 当

$a_0,\dots,a_{k+1}\in K$ 时, 称 $I_\gamma(a_0;a_1,\dots,a_n;a_{n+1})$ 为 $\mathcal{MT}(K)$ 的一个周期, 它的 motivic 提升

$$I^{\mathfrak{m}}_\gamma(a_0;a_1,\dots,a_n;a_{n+1})\in\mathcal{P}(K)$$

应满足 $\mathrm{per}(I^{\mathfrak{m}}_\gamma(a_0;a_1,\dots,a_n;a_{n+1}))=(-1)^{\mathrm{dep}(a_1,\dots,a_n)}I_\gamma(a_0;a_1,\dots,a_n;a_{n+1})$. 从而我们可以称 $I^{\mathfrak{m}}_\gamma(a_0;a_1,\dots,a_n;a_{n+1})$ 为 $\mathbb{P}^1\setminus(\{\infty\}\cup S)$ 上的一个 motivic 累次积分.

3.2 Motivic 分圆多重 zeta 值 I

现在考虑一类特殊的 motivic 累次积分, 当 $S=\{0,1\}$ 时, 可立即得到 motivic 多重 zeta 值. 在此特殊情形, 英国数学家 F. Brown[24] 运用 motive 理论证明了以下重要结果:

定理 3.1[24] (1) 当 $K=\mathbb{Q}$ 时猜想 3.2 成立, 更精确地, 所有 $\mathbb{Z}$ 上的 Tate motive 的周期都是多重 zeta 值的 $\mathbb{Q}[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}]$- 线性组合;

(2) 集合 (2.10) 构成 **MZV** 在 $\mathbb{Q}$ 上的一组生成元.

事实上, Brown[24] 还证明了有关 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 在 $\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ 的 pro-ℓ 基本群上的外作用 (outer action) 的 Deligne–Ihara 猜想.

当取 $S=\{0,\pm1\}$ 时, 可以立即得到 motivic 欧拉和. 更一般地, 取定正整数 N, 令 μ_N 为 N 次单位根群, 则当 $S=\{0\}\cup\mu_N$ 时, 立即得到第 N 层 motivic 分圆多重 zeta 值. 我们甚至可以具体构造出此种情形下的所有的 motivic 累次积分使得它们满足以下性质:

(I1) 空字: $I^{\mathfrak{m}}(a_0;a_1)=1$.

(I2) 闭路径: 对任意权 $n\geq1$, 如果 $a_0=a_{n+1}$, 则 $I^{\mathfrak{m}}(a_0;a_1,\dots,a_n;a_{n+1})=0$.

(I3) 洗牌积: 对任意整数 $j\geq1$, $c\geq0$, $k_j\geq1$, $\varepsilon_j\in\Gamma_N$, $\eta_j=\frac{1}{\varepsilon_j\cdots\varepsilon_d}$, 记 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_d)$, $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_d)$. 令 $\zeta^{\mathfrak{m}}_c(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\varepsilon}):=I^{\mathfrak{m}}(0;0_c,\eta_1,0_{k_1-1},\dots,\eta_d,0_{k_d-1};1)$, 并设 $\zeta^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\varepsilon}):=\zeta^{\mathfrak{m}}_0(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\varepsilon})$, 则

$$\zeta^{\mathfrak{m}}_c(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\varepsilon})=(-1)^c\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_d=c\\ i_1,\dots,i_d\geq0}}\left(\prod_{j=1}^{d}\binom{k_j+i_j-1}{i_j}\right)\zeta^{\mathfrak{m}}(k_1+i_1,\dots,k_d+i_d;\boldsymbol{\varepsilon}).$$

(I4) 正则化: 若 $a_1=\cdots=a_n\in\{0,1\}$, 则 $I^{\mathfrak{m}}(0;a_1,\dots,a_n;1)=0$.

(I5) 逆路径: $I^{\mathfrak{m}}(a_0;a_1,\dots,a_n;a_{n+1})=(-1)^nI^{\mathfrak{m}}(a_{n+1};a_n,\dots,a_1;a_0)$.

(I6) 同质性: $\forall\alpha\in\Gamma_N$, $I^{\mathfrak{m}}(0;\alpha a_1,\dots,\alpha a_n;\alpha a_{n+1})=I^{\mathfrak{m}}(0;a_1,\dots,a_n;a_{n+1})$.

(I7) 变量替换 $t\mapsto1-t$: $\forall a_1,\dots,a_n\in\{0,1\}$,

$$I^{\mathfrak{m}}(0;a_1,\dots,a_n;1)=I^{\mathfrak{m}}(0;1-a_n,\dots,1-a_1;1).$$

(I8) 路径叠加: $\forall a,b,x\in\Gamma_N\cup\{0\}$,

$$I^{\mathfrak{m}}(a;a_1,\dots,a_n;b)=\sum_{i=0}^{n}I^{\mathfrak{m}}(a;a_1,\dots,a_i;x)I^{\mathfrak{m}}(x;a_{i+1},\dots,a_n;b).$$

令 $\mathcal{H}^N$ 为满足 (I1)–(I8) 的所有第 N 层 motivic 分圆多重 zeta 值所生成的 $\mathbb{Q}$- 线性空间. 记 $\mathcal{A}^N=\mathcal{H}^N/\zeta^{\mathfrak{m}}(2)\mathcal{H}^N$, $\mathcal{L}^N=\mathcal{A}^N_{>0}/\mathcal{A}^N_{>0}\cdot\mathcal{A}^N_{>0}$, 并令 $\mathcal{H}^N_w$ 和 $\mathcal{A}^N_w$ 为由权为 w 的值生成的部分. 对正奇数 $r<w$, 通过修正某类 Hopf 代数的余乘可以得到下面的导子:

$$D_r:\mathcal{H}^N_w\mapsto\mathcal{L}^N_r\otimes\mathcal{H}^N_{w-r},$$

该导子将 $I^{\mathfrak{m}}(a_0;a_1,\dots,a_w;a_{w+1})$ 映射到

$$\sum_{p=0}^{w-r} I^{\mathfrak{l}}(a_p;a_{p+1},\dots,a_{p+r};a_{p+r+1})\otimes I^{\mathfrak{m}}(a_0;a_1,\dots,a_p,a_{p+r+1},\dots,a_w;a_{w+1}).$$

3.3 非分歧的 motivic 欧拉和

Brown 的学生 Glanois 在她的博士论文 [55] 中进一步发展了 [24, 42] 中的理论并得到以下结果:

定理 3.2 令 $a\in\mathbb{N}_0$, $\boldsymbol{\varepsilon}\in\{\pm1\}^d$, $\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d$ 使得 $a+|\boldsymbol{k}|=w$. 则权为 w 的 motivic 欧拉和 $\zeta_a^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\varepsilon})\in\mathcal{H}_w$ 当且仅当 $D_1\zeta_a^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\varepsilon})=0$ 并对所有正奇数 $r<w$ 满足 $D_r\zeta_a^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\varepsilon})\in\mathcal{L}_r\otimes\mathcal{H}_{w-r}$. 更进一步, 若对所有正奇数 $r<w$ 都满足 $D_r\zeta_a^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\varepsilon})=0$ 则存在 $c\in\mathbb{Q}$ 使得 $\zeta_a^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\varepsilon})=c\,\zeta^{\mathfrak{m}}(w)$. 这里, 若 $\boldsymbol{\varepsilon}=(1,\dots,1)$ 则将 $\zeta_a^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\varepsilon})$ 记为 motivic 多重 zeta 值 $\zeta_a^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k})$.

早在 20 世纪 90 年代, 数学物理学家 Broadhurst[22] 就发现欧拉和 (甚至有些第 6 层 CMZV) 会在费曼积分和纽结不变量的计算中出现, 但有些欧拉和实际上可以用多重 zeta 值的 $\mathbb{Q}$- 线性组合表示 (也即在 **MZV** 中), 他称此类欧拉和为荣誉多重 zeta 值, 我们称其为非分歧欧拉和, 而定理 3.2 正好可以用来判定此类 motivic 欧拉和. 例如, 本文第二作者 [140] 证明对所有正整数 n

$$8^n\zeta(\{1,\bar{2}\}_n)=\zeta(\{3\}_n).$$

此恒等式在 [130] 中被提升到 motivic 层面上的恒等式. 显而易见, 所有的奇偶变形都可以用欧拉和线性表示. 利用这层联系, 金仲宇和李江涛 [78] 研究了 motivic 二重 t-zeta 值并证明了金子—田坂 (Tasaka) 猜想. 对多重 T-zeta 值, 金子昌信和津村博文 [84] 有如下猜想:

猜想 3.3 (1) 在权为偶时, 若 $p,r\geq3$ 为奇而 q 为偶, 则 $T(p,q,r)$ 及其对偶均在 **MZV** 中. 它们与深度为 1 的多重 T-zeta 值及其对偶在一起就是所有非分歧的权为偶的多重 T-zeta 值;

(2) 在权为奇时, 若 $p,r\geq3$ 为偶, 则 $T(p,1,r)$ 及其对偶均在 **MZV** 中. 它们与深度为 1 和 2 的多重 T-zeta 值及其对偶在一起就是所有非分歧的权为奇的多重 T-zeta 值.

为解决猜想 3.3, 可以考虑 motivic 多重 T-zeta 值. 对此我们有以下结果.

定理 3.3[103, 131] 若 $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})\leq3$, 则 motivic 多重 T-zeta 值 $T^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k})$ 是非分歧的充分必要条件是

(1) $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})=1$ 时, $\boldsymbol{k}=k\geq2$;

(2) $\boldsymbol{k}=(k,l)$ 时, $l\geq2$ 且 $k+l$ 为奇数;

(3) $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})=3$ 时, 下面条件之一成立:

(i) $\boldsymbol{k}=(1,1,2),(1,1,3),(1,2,2)$, 或

(ii) $|\boldsymbol{k}|$ 为偶数, $\boldsymbol{k}=(O_{>1},E,O_{>1})$, 或

(iii) $|\boldsymbol{k}|$ 为奇数, $|\boldsymbol{k}|=(E,1,E)$,

这里 O 可以代表不同的奇数, 而 E 可以代表不同的偶数.

若 Grothendieck 周期猜想 3.1 成立, 则定理 3.3 就验证了猜想 3.3 在深度小于 4 时的情形. 对于另外两类奇偶变形, 我们有如下结果.

定理 3.4[103, 131] 若 $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})\leq3$, 则 motivic 多重 S-zeta 值 $S^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k})$ 是非分歧的充分必要条件是

(1) $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})=1$ 时, $\boldsymbol{k}=k\geq2$;

(2) $\boldsymbol{k}=(k,l)$ 时, $k,l\geq2$ 且 $k+l$ 为奇数;

(3) $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})=3$ 时, 下面条件之一成立:

(i) $|\boldsymbol{k}|$ 为偶数, $\boldsymbol{k}=(O_{>1},O,E)$ 或 $\boldsymbol{k}=(O_{>1},E,O_{>1})$, 或

(ii) $|\boldsymbol{k}|$ 为奇数, $\boldsymbol{k}=(E,1,E)$,

这里 O 可以代表不同的奇数, 而 E 可以代表不同的偶数.

定理 3.5 假设 $m,n,e\in\mathbb{N}$, $\boldsymbol{q}\in\mathbb{N}^d$ $(d\geq 0)$ 且其所有分量至少是 2. 当 $\boldsymbol{k}$ 有如下形式之一时, motivic 多重 t-zeta 值 $t^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k})$ 是非分歧的.

(1) $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{q}$;

(2) $\boldsymbol{k}=(\{2n\}_e,1,\boldsymbol{q})$;

(3) $\boldsymbol{k}=(2n,2m,2n,1,\boldsymbol{q})$;

(4) $\boldsymbol{k}=(2,1,3,2,1,\boldsymbol{q})$.

定理 3.6 令正整数 $n\leq d$ 并记 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{N}^d$. 假设 $k_n=1$, 在 k_n 之前的分量恰好有一个是奇数, 而在 k_n 之后的每个分量至少是 2, 则 $t^{\mathfrak{m}}(k_1,\ldots,k_d)$ 为分歧的.

猜想 3.4 假设 $m,n,e\in\mathbb{N}$ 且 $\boldsymbol{q}$ 的所有分量大于 1, 则多重 t-zeta 值 $t(\{2n\}_e,2m,\{2n\}_e,1,\boldsymbol{q})$ 是非分歧的.

通过数值计算我们发现当权小于 16 时,

$$S(2,1,1,1,4)=\frac{3577}{768}\zeta(9)+\frac{343}{384}\zeta(3)^3-\frac{63}{64}\zeta(2)^3\zeta(3)-\frac{217}{640}\zeta(2)^2\zeta(5)$$

应该是唯一的一个深度大于 3 的非分歧的多重 S-zeta 值.

注 3.1 当 $\boldsymbol{k}$ 的深度至少是 4 时, 我们有如下问题:

(1) $S(\boldsymbol{k})$ 是非分歧的是否仅在 $\boldsymbol{k}=(2,1,1,1,4)$ 时成立?

(2) 是否存在非分歧 $T(\boldsymbol{k})$?

(3) 是否存在非分歧的多重 t-zeta 值没有被定理 3.5 和猜想 3.4 覆盖?

3.4 Motivic 分圆多重 zeta 值 II

上面主要讨论了第二层分圆多重 zeta 值 (即欧拉和) 之间的一些关系, 现在考虑一般层的情形. 令 $\mathbf{CMZV}_w^{\mathfrak{m},N}$ 为由权为 w 层为 N 的所有的 motivic 分圆多重 zeta 值张成的 $\mathbb{Q}$- 线性空间, Deligne–Goncharov 有如下结果.

定理 3.7[43] 对任意的正整数 w 和 N, 有 $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{CMZV}_w^{\mathfrak{m},N}\leq DG(w,N)$, 这里

$$1+\sum_{w=1}^{\infty}DG(w,N)t^w=\begin{cases}\dfrac{1}{1-t^2-t^3}, & \text{如果 } N=1;\\ \dfrac{1}{1-t-t^2}, & \text{如果 } N=2;\\ \dfrac{1}{1-a(N)t+b(N)t^2}, & \text{如果 } N\geq 3,\end{cases}$$

其中 $a(N)=\frac{\varphi(N)}{2}+\nu(N)$, $b(N)=\nu(N)-1$, φ 是欧拉函数而 $\nu(N)$ 是 N 的不同素因子的个数.

更进一步, 在 $N=2,3,4,6,8$ 时 Deligne[43] 给出了 $\mathbf{CMZV}_w^{\mathfrak{m},N}$ 的一组生成元. 另一方面, 取定 $\eta_N=\exp(2\pi\mathrm{i}/N)$, 在 $N=3,4$ 时本文第二作者有如下猜想.

猜想 3.5 若 $N=3$ 或 4, 则 $\{\zeta(\{1\}^w;\eta_N^{t_1},\ldots,\eta_N^{t_w}):t_j=1,2\}$ 是 $\mathbf{CMZV}_w^{\mathfrak{m},N}$ 的一组基底.

为进一步研究猜想 3.5, 中南大学的李江涛教授 [96] 定义了形如 $\zeta(\{1\}_w;\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_w)$ 的分圆多重 zeta 值为单位分圆多重 zeta 值, 其中 ε_j 均为 N 次单位根且 $\varepsilon_w\neq 1$.

定理 3.8[96, 定理 1.2] 当 $N=2,3,4$ 时, 权为 w 的第 N 层的单位分圆多重 zeta 值形成了 $\mathbf{CMZV}_w^N$ 的一组生成元.

最近, 广濑稔 (M. Hirose) 通过进一步发展分圆多重 zeta 值的 motivic 理论证明了如下结果.

定理 3.9[70, 定理 11] 当 $K=\mathbb{Q}(\eta_N)$ 为 N 次分圆域而 N 为 2 或 3 的次方时, 猜想 3.2 成立.

定理 3.10[70, 推论 12] 假设 $p\in\{2,3\}$, $q=6-p$, $N=qp^M$ 且 $M\geq 0$, 并取定 N 次单位根 η_N. 则所有第 N 层权为 w 且深度为 r 的分圆多重 zeta 值均可以表示成以下值的 $\mathbb{Q}$- 线性组合:

$$\left\{(2\pi\mathrm{i})^s\zeta(k_1,\dots,k_e;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{e-1},\varepsilon_e\eta_N^{-1})\;\middle|\;\begin{array}{l}s\geq 0,\,0\leq e\leq r,\,k_1,\dots,k_e\geq 1,\\ k_1+\cdots+k_e+s=w,\\ \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_e\in\mu_{p^M}\end{array}\right\}.$$

4 多重 zeta 值、q- 模拟与罗巴代数

在多重 zeta 值所满足的各种算术和代数关系中, 最基本的就是双洗牌代数关系 —— 积分洗牌积关系与级数拟洗牌积关系, 而双洗牌积关系又是罗巴代数 (Rota–Baxter algebra) 所满足的最基本代数关系. 罗巴代数理论起源于美国著名数学家 G. Baxter[11] 于 1960 年在概率论领域中的研究. 在之后的十几年中, 著名数学家 G.-C. Rota[111] 和 P. Cartier[28] 将罗巴代数用于组合领域的理论研究中. 此外, 罗巴李代数与以著名物理学家杨振宁和 R. Baxter 命名的 Yang–Baxter 方程 [10, 15] 有着非常紧密的联系, 尽管两位 Baxter 并无血缘关系. 一般认为, 对罗巴代数系统性的研究始于 2000 年至 2001 年郭锂及其合作者发表在 *Advances in Mathematics* 上的三篇文章 [57, 59, 60]. 他们将自由交换罗巴代数以混合洗牌代数的方式构造出来. 这一构造不仅促进了罗巴代数的理论研究, 如完备化、零因子和链条件等, 而且使罗巴代数得以应用于洗牌代数相关的广泛领域, 包括 Hopf 代数、组合和 umbral 分析等理论. 更重要的一点是这一洗牌代数构造可以应用于对多变元 zeta 函数值的双洗牌代数关系的研究当中 [65, 134, 135].

罗巴代数 [58] 的具体定义如下: 假设 $\boldsymbol{k}$ 是一个环, λ 是 $\boldsymbol{k}$ 中一个元素. 若 R 是一个 $\boldsymbol{k}$- 代数, $P:R\to R$ 是一个线性变换, 且满足 Rota–Baxter 方程

$$P(x)P(y)=P(xP(y))+P(P(x)y)+\lambda P(xy)\quad(\forall x,y\in R),$$

则称二元组 (R,P) 为一个权为 λ 的罗巴代数, P 称为 R 上权为 λ 的罗巴算子. 例如, 考虑 $\mathbb{R}$ 上连续函数构成的环 $R=\mathbf{Cont}(\mathbb{R})$, 并定义算子

$$P:R\to R,\quad P(f)(x):=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

则 (R,P) 是一个权为 0 的罗巴代数且满足如下 Rota–Baxter 方程:

$$P(f)P(g)=P(P(f)g)+P(fP(g)).$$

根据多重 zeta 值的累次积分表达式 (2.1), 可知多重 zeta 值是满足积分洗牌积关系的, 这与权为 0 的罗巴代数所满足的 Rota–Baxter 方程是类似的.

4.1 多重 zeta 值在非正数处的重整化

20 世纪 50–60 年代, 数学物理学家们发现了一种可以将量子场论正则化的 BPHZ 方法, 后来法国数学家菲尔兹奖获得者 A. Connes 和德国美因茨大学的理论物理学家 D. Kreimer 发现费曼图所形成的 Hopf 代数可视为权为 -1 的罗巴代数, 从而将 BPHZ 方法代数化. 郭锂教授和四川大学张斌教授 [64] 将这种理论应用到多重 zeta 值的研究上, 首次系统地实现了多重 zeta 值在非正数处的重整化, 并且他们得到的重整化的多重 zeta 值同样满足拟洗牌关系 (见 2.1.1 节).

实际上, 人们后来又提出了几种满足拟洗牌关系的不同的重整化方法 [44, 102], 但让人诧异的是这些方法得到的重整化值都不尽相同. 本文第二作者和合作者们 [45] 先具体定义了某个 Hopf 代数的特征子群, 进而证明所有多重 zeta 值在非正数处的重整化方法都可以由这个群上的自由传递作用得到, 从而彻底解决了满足拟洗牌关系的多重 zeta 值在非正数处的重整化问题. 但是, 下面两个问题至今都还悬而未决:

(1) 如何定义满足洗牌关系的多重 zeta 函数在非正数处的重整化值?

(2) 如何定义满足洗牌和拟洗牌关系的多重 zeta 函数在全部整数处的重整化值?

4.2 q- 模拟多重 zeta 值

在本小节, 若无特别声明则始终假定 $0<q<1$. 在数论研究中, 对一种数值或函数, 经常可以考虑其 q- 模拟. 比如, 对任意的正整数 n, 可以定义它的 q- 模拟

$$[n]=[n]_q:=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

容易看出, $\lim_{q\to1}[n]_q=n$. 再比如, 受 [81] 启发, 本文第二作者 [139] 首先定义了如下 q- 模拟多重 zeta 值

$$\begin{aligned}\zeta_q^{\mathrm{BZ}}[\boldsymbol{k}]:=\zeta_q^{\mathrm{BZ}}[k_1,\dots,k_r]&:=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{q^{n_1(k_1-1)+\cdots+n_r(k_r-1)}}{[n_1]^{k_1}\cdots[n_r]^{k_r}}\\&=(1-q)^{|\boldsymbol{k}|}\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{q^{n_1(k_1-1)+\cdots+n_r(k_r-1)}}{(1-q^{n_1})^{k_1}\cdots(1-q^{n_r})^{k_r}},\end{aligned}$$

并将 [64] 中的方法应用到该 q- 模拟上从而实现了它们在非正数处的重整化. 因为 Bradley[19] 对此类值做了进一步的研究并发现了它们也满足和 (2.4) 同样的对偶关系, 因此, 近年来, 此类值被称为 Bradley–Zhao 型 q- 模拟多重 zeta 值. 容易看出, $\lim_{q\to1}\zeta_q^{\mathrm{BZ}}[\boldsymbol{k}]=\zeta(\boldsymbol{k})$ 所以 ζ^{BZ} 是一种具有良好解析和算术性质的 q- 模拟多重 zeta 值.

除了 BZ 型外, 人们还定义了几种其他形式的 q- 模拟多重 zeta 值. 为方便起见, 统一选定 $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_r)$, $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$, 定义

$$\zeta_q^{\boldsymbol{a}}[\boldsymbol{k}]:=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{q^{n_1(k_1-1)+\cdots+n_r(k_r-1)}}{[n_1]^{k_1}\cdots[n_r]^{k_r}}=(1-q)^{|\boldsymbol{k}|}\mathfrak{z}_q^{\boldsymbol{a}}[\boldsymbol{k}],\tag{4.1}$$

$$\mathfrak{z}_q^{\boldsymbol{a}}[\boldsymbol{k}]:=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{q^{n_1a_1+\cdots+n_ra_r}}{(1-q^{n_1})^{k_1}\cdots(1-q^{n_r})^{k_r}}.\tag{4.2}$$

例如, Schlesinger 和 Zudilin[149] 考虑了 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}$ 的情形, 大野泰生、奥田顺一 (J. Okuda) 和 Zudilin[106] 考虑了 $\boldsymbol{a}=(1,0,\dots,0)$ 的情形.

对于 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数 $f(t)$, 定义 Jackson q- 积分如下:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}_q x := \sum_{k\geq 0} f\big(\alpha+q^k(\beta-\alpha)\big)(q^k-q^{k+1})(\beta-\alpha). \tag{4.3}$$

显然, $\lim_{q\to 1}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}_q x = \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$. 取 $\alpha=0$, $\beta=t$ 便得到

$$\boldsymbol{J}[f](t) := (1-q)\sum_{k\geq 0} f(q^k t)q^k t = (1-q)\sum_{k\geq 0}\boldsymbol{E}^k\big[\boldsymbol{M}[f]\big](t) = (1-q)\boldsymbol{P}\big[\boldsymbol{M}[f]\big](t), \tag{4.4}$$

其中 $\boldsymbol{M}[f](t) := tf(t)$ 为乘积算子,

$$\boldsymbol{E}[f](t) := \boldsymbol{E}_q[f](t) := f(qt) \quad 和 \quad \boldsymbol{P}[f](t) := \boldsymbol{P}_q[f](t) := f(t)+f(qt)+f(q^2t)+\cdots$$

分别是 q- 扩张算子和 (主项) q- 求和算子. 再定义 (余项) q- 求和算子为

$$\boldsymbol{R}[f](t) := \boldsymbol{R}_q[f](t) := f(qt)+f(q^2t)+\cdots = (\boldsymbol{P}[f]-f)(t).$$

显然, 作为算子 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{I}$, 其中 $\boldsymbol{I}[f]=f$, 这就证明了 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{P}$. 令 $t\mathbb{Q}[\![t,q]\!]$ 为双变量形式幂级数环且 $t>0$, 则 $\boldsymbol{J},\boldsymbol{E},\boldsymbol{P},\boldsymbol{R}$ 均是 $t\mathbb{Q}[\![t,q]\!]$ 上的 $\mathbb{Q}[\![q]\!]$- 线性自同态. 容易证明

命题 4.1 对任意的 $f,g\in t\mathbb{Q}[\![t,q]\!]$ 有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}[f]\boldsymbol{P}[g] &= \boldsymbol{P}\big[\boldsymbol{P}[f]g\big]+\boldsymbol{P}\big[f\boldsymbol{P}[g]\big]-\boldsymbol{P}[fg],\\
\boldsymbol{R}[f]\boldsymbol{R}[g] &= \boldsymbol{R}\big[\boldsymbol{R}[f]g\big]+\boldsymbol{R}\big[f\boldsymbol{R}[g]\big]+\boldsymbol{R}[fg],\\
\boldsymbol{R}[f]\boldsymbol{P}[g] &= \boldsymbol{R}\big[\boldsymbol{R}[f]g\big]+\boldsymbol{R}\big[f\boldsymbol{R}[g]\big]+\boldsymbol{R}[f]g+\boldsymbol{R}[fg],\\
\boldsymbol{J}[f]\boldsymbol{J}[g] &= \boldsymbol{J}\big[\boldsymbol{J}[f]g\big]+\boldsymbol{J}\big[f\boldsymbol{J}[g]\big]-(1-q)\boldsymbol{J}\big[\boldsymbol{I}fg\big]\\
&= \boldsymbol{J}\big[f\boldsymbol{J}[g]\big]+q\boldsymbol{J}\big[\boldsymbol{J}\big[E[f]\big]g\big].
\end{aligned}$$

反复利用命题 4.1 可以证明以下结果.

定理 4.1 令 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{N}^d$, $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_d)\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^d$. 记 $\boldsymbol{y}:=\boldsymbol{y}(t)=\frac{t}{1-t}$,

$$\mathfrak{z}_q[\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{k});t] := \boldsymbol{R}^{a_1}\big[\boldsymbol{P}^{k_1-a_1}[\boldsymbol{y}\boldsymbol{R}^{a_2}[\boldsymbol{P}^{k_2-a_2}[\boldsymbol{y}\cdots\boldsymbol{R}^{a_d}[\boldsymbol{P}^{k_d-a_d}[\boldsymbol{y}]]\cdots]]]\big](t). \tag{4.5}$$

若对所有 $j=1,\ldots,d$ 都成立 $a_1+\cdots+a_j>0$, 则

$$\zeta_q^{\boldsymbol{a}}[\boldsymbol{k}] = (1-q)^w\mathfrak{z}_q[\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{k});1], \quad \mathfrak{z}_q^{\boldsymbol{a}}[\boldsymbol{k}] = \mathfrak{z}_q[\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{k});1]. \tag{4.6}$$

以此定理为基础, 通过将所有以上算子形式化, 即把它们考虑成字母, 然后做代数处理, 就可以得到一般的 q- 模拟多重 zeta 值的双洗牌结构, 细节参见 [143].

近年来, 人们还研究了一些其他的 q- 模拟多重 zeta 值. 例如, 对任意的 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{N}^r$, $\boldsymbol{p}=(p_1,\ldots,p_r)$, 其中 $p_1,\ldots,p_{r-1}\in\mathbb{Q}[t]$, $p_r\in t\mathbb{Q}[t]$, H. Bachmann 和 U. Kühn[7] 定义了

$$\mathfrak{z}_q(\boldsymbol{k};\boldsymbol{p}) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{p_1(q^{n_1})\ldots p_r(q^{n_r})}{(1-q^{n_1})^{s_1}\cdots(1-q^{n_r})^{s_r}},$$

并对固定的 $d\geq 0$ 考虑 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}_d = \mathcal{Z}_d(q) := \langle \mathfrak{z}_q(\boldsymbol{k};\boldsymbol{p}) \,|\, r\geq 0,\, \boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^r,\, p_1,\ldots,p_{r-1}\in\mathbb{Q}[t],\, p_r\in t\mathbb{Q}[t],\, \deg p_j\leq k_j-d\rangle_{\mathbb{Q}},\\
&\mathcal{Z}_d^\circ = \mathcal{Z}_d^\circ(q) := \langle \mathfrak{z}_q(\boldsymbol{k};\boldsymbol{p})\in\mathcal{Z}_d \,|\, p_1,\ldots,p_r\in t\mathbb{Q}[t]\rangle_{\mathbb{Q}}.
\end{aligned}$$

简记 $\mathcal{Z}=\mathcal{Z}_0$, $\mathcal{Z}^\circ=\mathcal{Z}_0^\circ$. H. Bachmann[5] 进一步定义一类双括号 (bi-bracket) 函数作为另一种

q- 模拟多重 zeta 值, 并仔细研究了这类值和拟模形式 (quasi modular form) 的关系. 对于任意的两组整数 $k_1,\dots,k_r\geq 1$ 以及 $l_1,\dots,l_r>0$, 定义

$$\begin{bmatrix}k_1,\dots,k_r\\ l_1,\dots,l_r\end{bmatrix}:=\sum_{\substack{0<u_1<\cdots<u_r\\ v_1,\dots,v_r>0}}\frac{u_1^{l_1}}{l_1!}\cdots\frac{u_r^{l_r}}{l_r!}\frac{v_1^{k_1}\cdots v_r^{k_r}}{(k_1-1)!\cdots(k_r-1)!}\cdot q^{l_1k_1+\cdots+l_rk_r}\in\mathbb{Q}[\![q]\!].$$

这种 q- 模拟的最大的优点是可以定义它的权为 $k_1+\cdots+k_r+l_1+\cdots+l_r$.

定理 4.2[20, 命题 3–4], [8, 定理 1] 和 [7, 命题 3.14] 我们有

(1) 所有 Schlesinger–Zudilin 型 q- 模拟多重 zeta 值 $\mathfrak{z}_q(k_1,\dots,k_r;t^{k_1},\dots,t^{k_r})$ 在 $\mathbb{Q}$ 上生成 $\mathcal{Z}$;

(2) 所有双括号函数在 $\mathbb{Q}$ 上生成 $\mathcal{Z}$;

(3) 所有形如 $\left[\begin{smallmatrix}k_1,\dots,k_r\\ 0,\dots,0\end{smallmatrix}\right]$ 的双括号函数在 $\mathbb{Q}$ 上生成 $\mathcal{Z}^\circ$;

(4) 所有 Bradley–Zhao 型 q- 模拟多重 zeta 值 $\mathfrak{z}_q(k_1,\dots,k_r;t^{k_1-1},\dots,t^{k_r-1})$ 在 $\mathbb{Q}$ 上生成 $\mathcal{Z}_1$;

(5) 在算子 $q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}$ 作用下 $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{Z}^\circ$ 都各自封闭.

由定理 4.2 我们可记 $\mathcal{Z}_w$ 为由权为 $\leq w$ 的双括号函数在 $\mathbb{Q}$ 上张成的线性空间, 则不难证明对任意的 $a,b\geq 1$ 有 $\mathcal{Z}_a\mathcal{Z}_b\subseteq\mathcal{Z}_{a+b}$, 从而可定义 $\operatorname{Gr}\mathcal{Z}_w=\mathcal{Z}_w/\mathcal{Z}_{w-1}$. Bachmann 和 Kühn[8] 提出了以下猜想.

猜想 4.1[8] 空间 $\mathcal{Z}=\mathcal{Z}^\circ$, 并且 $\mathcal{Z}_1$ 和 $\mathcal{Z}_1^\circ$ 在算子 $q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}$ 作用下也是封闭的. 更进一步,

$$\sum_{w=0}^{\infty}t^w\dim\operatorname{Gr}\mathcal{Z}_w=\frac{1}{1-t-t^2-t^3+t^6+t^7+t^8+t^9}.$$

作为以上 q- 模拟的一种特殊形式, 菲尔兹奖获得者、旅美俄裔数学家 A. Okounkov[108] 在研究 Hilbert 概形的过程中碰到了形如 $\mathfrak{z}_q^O(\boldsymbol{k}):=\mathfrak{z}_q(\boldsymbol{k};\boldsymbol{p}^O)$ 的 q- 模拟多重 zeta 值, 其中若 $k_j\geq 2$ 为偶数则 $p_j^O(t)=t^{k_j/2}$, 若 $k_j\geq 3$ 为奇数则 $p_j^O(t)=t^{(k_j-1)/2}(t+1)$. 令 $\mathcal{Z}_w^O$ 为所有权为 $\leq w$ 的 $\mathfrak{z}_q^O(\boldsymbol{k})$ 生成的 $\mathbb{Q}$- 线性空间. 则对任意的 $a,b\geq 2$ 可以证明 $\mathcal{Z}_a^O\mathcal{Z}_b^O\subseteq\mathcal{Z}_{a+b}^O$, 从而可定义 $\operatorname{Gr}\mathcal{Z}_w^O=\mathcal{Z}_w^O/\mathcal{Z}_{w-1}^O$. Okounkov[108] 进而提出了以下猜想.

猜想 4.2[108] 令 $\mathcal{Z}^O$ 为所有 $\mathfrak{z}_q^O(\boldsymbol{k})$ ($\boldsymbol{k}\in(\mathbb{N}_{\geq 2})^d$, $d\geq 1$) 生成的 $\mathbb{Q}$ 上的代数.

(1) 定义 $\mathfrak{z}_q^O(\boldsymbol{k})$ 的权为 $|\boldsymbol{k}|$. 那么 $\mathcal{Z}^O$ 可视为由权分次产生的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$- 分次代数, 它可由所有 $\mathfrak{z}_q^O(\boldsymbol{k})$ ($2\leq k_i\leq 5$) 生成, 且在算子 $q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}$ 作用下权会增加 2.

(2) 我们有

$$\sum_{w=0}^{\infty}t^w\dim\operatorname{Gr}\mathcal{Z}_w^O=\frac{1}{1-t^2-t^3-t^4-t^8+t^9+t^{10}+t^{11}+t^{12}}.$$

此猜想在权小于 7 时已被 [143] 验证.

5 一些未解决的猜想

本节将给出一些由多重 zeta 值及相关变形所张成的 $\mathbb{Q}$- 线性空间的基底和维数猜想.

猜想 5.1[137] (直和猜想)

$$\mathbf{MZV}=\bigoplus_{w=0}^{\infty}\mathbf{MZV}_w.$$

猜想 5.2[76, 84, 128, 129, 133, 137] (多重 zeta 值及相关变形的空间维数猜想)

$$\sum_{w=0}^{\infty}\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{MZV}_w t^w=\frac{1}{1-t^2-t^3},\quad \sum_{w=0}^{\infty}\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{AMZV}_w t^w=\frac{1}{1-t-t^2},$$
$$\sum_{w=0}^{\infty}\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{MtV}_{w+1} t^w=\frac{1}{1-t-t^2},\quad \sum_{w=0}^{\infty}\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{AMTV}_w t^w=\frac{1}{1-t-t^2-t^3},$$
$$\sum_{w=0}^{\infty}\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{MMV}_w t^w=\sum_{w=0}^{\infty}\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{MMVe}_w t^w=\frac{1}{1-t-t^2}-\frac{t}{1-t},$$
$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{MTV}_{2k}=\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{MTV}_{2k-1}+\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{MTV}_{2k-2}\quad (k\geq 1),$$
$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{MSV}_{2k+1}=\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{MSV}_{2k-1}+\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{MSV}_{2k-2}\quad (k\geq 1),$$
$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{AMSV}_n=2\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{AMSV}_{n-1}-2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+4\quad (n\geq 3),$$
$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathbf{AMtV}_n=3\times 2^{n-2}\quad (n\geq 2).$$

猜想 5.3[128, 129] (空间包含关系猜想)

$$\mathbf{MSV}\subseteq\mathbf{MMVo},\quad \mathbf{MZV}\subseteq\mathbf{MtV}\cap\mathbf{MTV}\cap\mathbf{MSV},\quad \mathbf{MMVe}=\mathbf{MMV},$$
$$\mathbf{MTV}_w\subsetneq\mathbf{MSV}_w\ (w\geq 3),\quad \mathbf{AMTV}_w\subsetneq\mathbf{AMSV}_w\ (w\geq 2),$$
$$\mathbf{MMVe}_w=\mathbf{MMV}_w\ (w\geq 1),\quad \mathbf{MMVo}_w\subsetneq\mathbf{MMV}_w\ (w\geq 5).$$

猜想 5.4[74, 85, 128] (基底猜想)

(1) **MZV** 的基底: $\{\zeta(\boldsymbol{k})\,|\,\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r),\ r\geq 1,\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=w,\ k_i\in\{2,3\}\}$, $\{t(2)^n t(k_1,\ldots,k_r)\,|\,n,r\geq 0,\ k_i$ 为奇数$,k_i\geq 3,\ 2n+k_1+\cdots+k_r=w\}$;

(2) **MtV** 的基底: $\{t(k_1+1,k_2,\ldots,k_r)\,|\,k_1+\cdots+k_r=k-1,\ k_i\in\{1,2\},\ 1\leq r\leq k-1\}$;

(3) **AMMV** 的基底: $\{M_\sigma^\varepsilon(\{1\}_w)\,|\,\sigma=(-1,\{1\}_{w-1}),\ \varepsilon\in\{\pm 1\}^w\}$.

致谢 作者感谢浙江大学蔡天新教授、美国罗格斯大学郭锂教授、四川大学张斌教授、同济大学李忠华教授、浙江理工大学王伟平教授、中南大学李江涛教授、福州大学钟展良教授、浙江外国语学院沈忠燕教授、北京大学赖力教授、同济大学晏露博士与日本九州大学孙荐博博士的鼓励与帮助.

参考文献

[1] Akhilesh, P., Multiple zeta values and multiple Apéry-like sums, *J. Number Theory*, 2021, 226: 72–138.
[2] Apéry, R., Irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, *Astérisque*, 1979, 61: 11–13 (in French).
[3] Arakawa, T. and Kaneko, M., Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, 1999, 153: 189–209.
[4] Au, K.C., Iterated integrals and multiple polylogarithm at algebraic arguments, 2022, arXiv:2201.01676.
[5] Bachmann, H., The algebra of bi-brackets and regularized multiple Eisenstein series, *J. Number Theory*, 2019, 200: 260–294.
[6] Bachmann, H., Kadota, S.Y., Suzuki, Y., Yamamoto, S. and Yamasaki, Y., Sum formulas for Schur multiple zeta values, *J. Combin. Theory Ser. A*, 2023, 200: Paper No. 105781, 40 pp.
[7] Bachmann, H. and Kühn, U., The algebra of generating functions for multiple divisor sums and applications to multiple zeta values, *Ramanujan J.*, 2016, 40(3): 605–648.
[8] Bachmann, H. and Kühn, U., A dimension conjecture for q-analogues of multiple zeta values, In: Periods in Quantum Field Theory and Arithmetic, Springer Proc. Math. Stat., Vol. 314, Cham: Springer, 2020, 237–258.

[9] Bachmann, H. and Yamasaki, Y., Checkerboard style Schur multiple zeta values and odd single zeta values, *Math. Z.*, 2018, 290(3/4): 1173–1197.
[10] Bai, C.M., Guo, L. and Ni, X., Nonabelian generalized Lax pairs, the classical Yang–Baxter equation and PostLie algebras, *Comm. Math. Phys.*, 2010, 297(2): 553–596.
[11] Baxter, G., An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity, *Pacific J. Math.*, 1960, 10: 731–742.
[12] Berger, S., Chandra, A., Jain, J., Xu, D., Xu, C. and Zhao, J.Q., Proof of Kaneko–Tsumura conjecture on triple T-values, *Int. J. Number Theory*, 2023, 19(3): 495–510.
[13] Berndt, B.C., Ramanujan's Notebooks. Part II, New York: Springer-Verlag, 1989.
[14] Beukers, F., A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, *Bull. London Math. Soc.*, 1979, 11(3): 268–272.
[15] Bordemann, M., Generalized Lax pairs, the modified classical Yang–Baxter equation, and affine geometry of Lie groups, *Comm. Math. Phys.*, 1990, 135(1): 201–216.
[16] Borwein, J.M., Bradley, D.M. and Broadhurst, D.J., Evaluations of k-fold Euler/Zagier sums: a compendium of results for arbitrary k, *Electron. J. Combin.*, 1997, 4(2): Research Paper 5, 21 pp.
[17] Borwein, J.M. and Girgensohn, R., Evaluation of triple Euler sums, *Electron. J. Combin.*, 1996, 3(1): Research Paper 23, 27 pp.
[18] Bowman, D. and Bradley, D.M., The algebra and combinatorics of shuffles and multiple zeta values, *J. Combin. Theory Ser. A*, 2002, 97(1): 43–61.
[19] Bradley, D.M., Multiple q-zeta values, *J. Algebra*, 2005, 283(2): 752–798.
[20] Brindle, B., A unified approach to qMZVs, 2021, arXiv:2111.00051.
[21] Broadhurst, D.J., Exploiting the 1,440-fold symmetry of the master two-loop diagram, *Z. Phys. C Part. Fields*, 1986, 32: 249–253.
[22] Broadhurst, D.J., Massive 3-loop Feynman diagrams reducible to SC^* primitives of algebras of the sixth root of unity, *Eur. Phys. J. C Part. Fields*, 1999, 8(2): 313–333.
[23] Broadhurst, D.J. and Kreimer, D., Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops, *Phys. Lett. B*, 1997, 393(3/4): 403–412.
[24] Brown, F., Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$, *Ann. of Math.* (*2*), 2012, 175(2): 949–976.
[25] Brown, F., Depth-graded motivic multiple zeta values, *Compos. Math.*, 2021, 157(3): 529–572.
[26] Brown, F., Carr, S. and Schneps, L., The algebra of cell-zeta values, *Compos. Math.*, 2010, 146(3): 731–771.
[27] Campbell, J.M., Glasser, M.L. and Zhou, Y.J., New evaluations of inverse binomial series via cyclotomic multiple zeta values, 2024, arXiv:2403.16945.
[28] Cartier, P., On the structure of free Baxter algebras, *Adv. Math.*, 1972, 9: 253–265.
[29] Chang, C.-Y., Linear independence of monomials of multizeta values in positive characteristic, *Compos. Math.*, 2014, 150(11): 1789–1808.
[30] Chang, C.-Y., Papanikolas, M.A. and Yu, J., An effective criterion for Eulerian multizeta values in positive characteristic, *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*), 2019, 21(2): 405–440.
[31] Chang, C.-Y. and Mishiba, Y., On multiple polylogarithms in characteristic p: v-adic vanishing versus ∞-adic Eulerianness, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2019, 2019(3): 923–947.
[32] Chang, C.-Y. and Mishiba, Y., On a conjecture of Furusho over function fields, *Invent. Math.*, 2021, 223(1): 49–102.
[33] Charlton, S., Gangl, H., Lai, L., Xu, C. and Zhao, J.Q., On two conjectures of Sun concerning Apéry-like series, *Forum Math.*, 2023, 35(6): 1533–1547.
[34] Chen, K.T., Algebras of iterated path integrals and fundamental groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1971, 156: 359–379.
[35] Chen, K.T., Iterated path integrals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1977, 83(5): 831–879.
[36] Chen, K.-W., Chung, C.-L. and Eie, M., Sum formulas of multiple zeta values with arguments multiples of a common positive integer, *J. Number Theory*, 2017, 177: 479–496.
[37] Chung, C.-L., Eie, M. and Lee, T.-Y., Another expression of the restricted sum formula of multiple zeta values, *J. Number Theory*, 2016, 166: 452–472.
[38] Chung, C.-L. and Ong, Y.L., On vectorized weighted sum formulas of multiple zeta values, *Taiwanese J. Math.*, 2016, 20(2): 243–261.
[39] Dac, T.N., On Zagier–Hoffman's conjectures in positive characteristic, *Ann. of Math.* (*2*), 2021, 194(1): 361–392.
[40] Davydychev, A.I. and Kalmykov, M.Yu., Massive Feynman diagrams and inverse binomial sums, *Nuclear Phys. B*, 2004, 699(1/2): 3–64.

[41] Deligne, P., The fundamental group of the projective line minus three points, In: Galois Groups over Q, Math. Sci. Res. Inst. Publ., Vol. 16, New York: Springer, 1989, 79–297.
[42] Deligne, P., The motivic unipotent fundamental group of $\mathbf{G}_m - \mu N$, for $N = 2, 3, 4, 6$ or 8, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 2010, 2010(112): 101–141 (in French).
[43] Deligne, P. and Goncharov, A.B., Mixed Tate motivic fundamental groups, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (*4*), 2005, 38(1): 1–56 (in French).
[44] Ebrahimi-Fard, K., Manchon, D. and Singer, J., Renormalisation of q-regularised multiple zeta values, *Lett. Math. Phys.*, 2016, 106(3): 365–380.
[45] Ebrahimi-Fard, K., Manchon, D., Singer, J. and Zhao, J.Q., Renormalisation group for multiple zeta values, *Commun. Number Theory Phys.*, 2018, 12(1): 75–96.
[46] Eie, M., Liaw, W.-C. and Ong, Y.L., Several weighted sum formulas of multiple zeta values, *Int. J. Number Theory*, 2017, 13(9): 2253–2264.
[47] Eie, M. and Ong, Y.L., Sum formulas of multiple zeta values with even arguments and polynomial weights, *J. Number Theory*, 2018, 188: 247–262.
[48] Euler, L., Leonhardi Euleri—Opera Omnia, Series 4A, Commercium Epistolicum, Vol. 4.1, Correspondence of Leonhard Euler with Christian Goldbach, Part I, Basel: Springer, 2015 (in Latin and German).
[49] Felder, M., On the irrationality of certain coefficients of the Alekseev–Torossian associator, *J. Lie Theory*, 2017, 27(2): 501–528.
[50] Fischler, S., Sprang, J. and Zudilin, W., Many odd zeta values are irrational, *Compos. Math.*, 2019, 155(5): 938–952.
[51] Flajolet, P. and Salvy, B., Euler sums and contour integral representations, *Experiment. Math.*, 1998, 7(1): 15–35.
[52] Furusho, H., On the coefficients of the Alekseev–Torossian associator, *J. Algebra*, 2018, 506: 364–378.
[53] Gangl, H., Kaneko, M. and Zagier, D., Double zeta values and modular forms, In: Automorphic Forms and Zeta Functions, Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2006, 71–106.
[54] Genčev, M., On restricted sum formulas for multiple zeta values with even arguments, *Arch. Math.* (*Basel*), 2016, 107(1): 9–22.
[55] Glanois, C., Periods of the motivic fundamental groupoid of $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \mu_N, \infty\}$, 2016, arXiv:1603.05155.
[56] Granville, A., A decomposition of Riemann's zeta-function, In: Analytic Number Theory, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 247, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997, 95–101.
[57] Guo, L., Properties of free Baxter algebras, *Adv. Math.*, 2000, 151(2): 346–374.
[58] Guo, L., An Introduction to Rota–Baxter Algebra, Surveys of Modern Mathematics, Vol. 4, Somerville, MA: International Press, 2012.
[59] Guo, L. and Keigher, W., On free Baxter algebras: completions and the internal construction, *Adv. Math.*, 2000, 151(1): 101–127.
[60] Guo, L. and Keigher, W., Baxter algebras and shuffle products, *Adv. Math.*, 2000, 150(1): 117–149.
[61] Guo, L., Lei, P. and Zhao, J.Q., Families of weighted sum formulas for multiple zeta values, *Int. J. Number Theory*, 2015, 11(3): 997–1025.
[62] Guo, L., Paycha, S. and Zhang, B., Conical zeta values and their double subdivision relations, *Adv. Math.*, 2014, 252: 343–381.
[63] Guo, L. and Xie, B.Y., Weighted sum formula for multiple zeta values, *J. Number Theory*, 2009, 129(11): 2747–2765.
[64] Guo, L. and Zhang, B., Renormalization of multiple zeta values, *J. Algebra*, 2008, 319(9): 3770–3809.
[65] Guo, L. and Zhang, B., Polylogarithms and multiple zeta values from free Rota–Baxter algebras, *Sci. China Math.*, 2010, 53(9): 2239–2258.
[66] Hanamura, M., Mixed motives and algebraic cycles, I, *Math. Res. Lett.*, 1995, 2(6): 811–821.
[67] Hanamura, M., Mixed motives and algebraic cycles, II, *Invent. Math.*, 2004, 158(1): 105–179.
[68] Harada, R., Alternating multizeta values in positive characteristic, *Math. Z.*, 2021, 298(3/4): 1263–1291.
[69] Hessami Pilehrood, Kh. and Hessami Pilehrood, T., Congruences arising from Apéry-type series for zeta values, *Adv. in Appl. Math.*, 2012, 49(3/4/5): 218–238.
[70] Hirose, M., Mixed Tate motives and cyclotomic multiple zeta values of level 2^n or 3^n, 2024, arXiv:2408.15975.
[71] Hirose, M. and Sato, N., Iterated integrals on $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, z\}$ and a class of relations among multiple zeta values, *Adv. Math.*, 2019, 348: 163–182.
[72] Hirose, M. and Sato, N., Algebraic differential formulas for the shuffle, stuffle and duality relations of iterated integrals, *J. Algebra*, 2020, 556: 363–384.

[73] Hoffman, M.E., Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.*, 1992, 152(2): 275–290.
[74] Hoffman, M.E., The algebra of multiple harmonic series, *J. Algebra*, 1997, 194(2): 477–495.
[75] Hoffman, M.E., On multiple zeta values of even arguments, *Int. J. Number Theory*, 2017, 13(3): 705–716.
[76] Hoffman, M.E., An odd variant of multiple zeta values, *Commun. Number Theory Phys.*, 2019, 13(3): 529–567.
[77] Ihara, K., Kaneko, M. and Zagier, D., Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compos. Math.*, 2006, 142(2): 307–338.
[78] Jin, Z.Y. and Li, J.T., Motivic multiple zeta values relative to μ_2, *Algebra Number Theory*, 2020, 14(10): 2685–2712.
[79] Kalmykov, M.Yu., Ward, B.F.L. and Yost, S.A., Multiple (inverse) binomial sums of arbitrary weight and depth and the all-order ε-expansion of generalized hypergeometric functions with one half-integer value of parameter, *J. High Energy Phys.*, 2007, 2007(10): Paper No. 48, 26 pp.
[80] Kamano, K., Weighted sum formulas for finite multiple zeta values, *J. Number Theory*, 2018, 192: 168–180.
[81] Kaneko, M., Kurokawa, N. and Wakayama, M., A variation of Euler's approach to values of the Riemann zeta function, *Kyushu J. Math.*, 2003, 57(1): 175–192.
[82] Kaneko, M., Murakami, T. and Yoshihara, A., On finite multiple zeta values of level two, *Pure Appl. Math. Q.*, 2023, 19(1): 267–280.
[83] Kaneko, M. and Tsumura, H., Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, 2018, 232: 19–54.
[84] Kaneko, M. and Tsumura, H., On multiple zeta values of level two, *Tsukuba J. Math.*, 2020, 44(2): 213–234.
[85] Kaneko, M., Xu, C. and Yamamoto, S., A generalized regularization theorem and Kawashima's relation for multiple zeta values, *J. Algebra*, 2021, 580: 247–263.
[86] Kaneko, M. and Yamamoto, S., A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, *Selecta Math.* (*N.S.*), 2018, 24(3): 2499–2521.
[87] Kawashima, G., A class of relations among multiple zeta values, *J. Number Theory*, 2009, 129(4): 755–788.
[88] Komori, Y., Matsumoto, K. and Tsumura, H., A study on multiple zeta values from the viewpoint of zeta-functions of root systems, *Funct. Approx. Comment. Math.*, 2014, 51(1): 43–76.
[89] Kontsevich, M. and Zagier, D., Periods, In: Mathematics Unlimited—2001 and Beyond, Berlin: Springer, 2001, 771–808.
[90] Lai, L. and Yu, P., A note on the number of irrational odd zeta values, *Compos. Math.*, 2020, 156(8): 1699–1717.
[91] Lê, Q.T. and Nguyen, H.D., Euler reflexion formulas for motivic multiple zeta functions, *J. Algebraic Geom.*, 2018, 27(1): 91–120.
[92] Le, T.T.Q. and Murakami, J., Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions, *Topology Appl.*, 1995, 62(2): 193–206.
[93] Le, T.T.Q. and Murakami, J., Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial, *Nagoya Math. J.*, 1996, 142: 39–65.
[94] Levine, M., Mixed Motives, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 57, Providence, RI: AMS, 1998.
[95] Li, J.T., The depth structure of motivic multiple zeta values, *Math. Ann.*, 2019, 374(1/2): 179–209.
[96] Li, J.T., Unit cyclotomic multiple zeta values for μ_2, μ_3 and μ_4, *Adv. Math.*, 2024, 438: Paper No. 109466, 36 pp.
[97] Li, J.T. and Liu, F., Motivic double zeta values of odd weight, *Manuscripta Math.*, 2021, 166(1/2): 19–36.
[98] Li, Z.H., Sum of multiple zeta values of fixed weight, depth and i-height, *Math. Z.*, 2008, 258(1): 133–142.
[99] Li, Z.H., Another proof of Zagier's evaluation formula of the multiple zeta values $\zeta(2,\ldots,2,3,2,\ldots,2)$, *Math. Res. Lett.*, 2013, 20(5): 947–950.
[100] Li, Z.H. and Qin, C., Weighted sum formulas of multiple zeta values with even arguments, *Math. Z.*, 2019, 291(3/4): 1337–1356.
[101] Li, Z.H. and Xu, C., Weighted sum formulas of multiple t-values with even arguments, *Forum Math.*, 2020, 32(4): 965–976.
[102] Manchon, D. and Paycha, S., Nested sums of symbols and renormalized multiple zeta values, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2010, 2010(24): 4628–4697.
[103] Murakami, T., On Hoffman's t-values of maximal height and generators of multiple zeta values, *Math. Ann.*, 2022, 382(1/2): 421–458.
[104] Nakamura, T., Restricted and weighted sum formulas for double zeta values of even weight, Šiauliai Math. Semin., 2009, 4(12): 151–155.

[105] Nakasuji, M., Phuksuwan, O. and Yamasaki, Y., On Schur multiple zeta functions: a combinatoric generalization of multiple zeta functions, *Adv. Math.*, 2018, 333: 570–619.
[106] Ohno, Y., Okuda, J.-I. and Zudilin, W., Cyclic q-MZSV sum, *J. Number Theory*, 2012, 132(1): 144–155.
[107] Ohno, Y. and Zagier, D., Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, *Indag. Math.* (*N.S.*), 2001, 12(4): 483–487.
[108] Okounkov, A., Hilbert schemes and multiple q-zeta values, *Funct. Anal. Appl.*, 2014, 48(2): 138–144.
[109] Ono, M., Finite multiple zeta values associated with 2-colored rooted trees, *J. Number Theory*, 2017, 181: 99–116.
[110] Panzer, E., The parity theorem for multiple polylogarithms, *J. Number Theory*, 2017, 172: 93–113.
[111] Rota, G.-C., Baxter algebras and combinatorial identities, I, II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1969, 75: 325–334.
[112] Shen, Z.Y. and Cai, T.X., Some identities for multiple zeta values, *J. Number Theory*, 2012, 132(2): 314–323.
[113] Shen, Z.Y. and Cai, T.X., Some identities for alternating multiple zeta values, *Acta Math. Sinica* (*Chinese Ser.*), 2013, 56(4): 441–450 (in Chinese).
[114] Shen, Z.Y. and Jia, L.R., Some identities for multiple Hurwitz zeta values, *J. Number Theory*, 2017, 179: 256–267.
[115] Sprang, J., Infinitely many odd zeta values are irrational: by elementary means, 2018, arXiv:1802.09410.
[116] Sun, Z.W., New Conjectures in Number Theory and Combinatorics, Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2021 (in Chinese).
[117] Sun, Z.W. and Zhou, Y.J., Evaluations of $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2\binom{3k}{k}}$ and related series, 2024, arXiv:2401.12083.
[118] Takeyama, Y., On a weighted sum of multiple T-values of fixed weight and depth, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 2021, 104(3): 398–405.
[119] Terasoma, T., Mixed Tate motives and multiple zeta values, *Invent. Math.*, 2002, 149(2): 339–369.
[120] Terasoma, T., Geometry of multiple zeta values, In: International Congress of Mathematicians, Vol. II, Zürich: Eur. Math. Soc., 2006, 627–635.
[121] Thakur, D.S., Shuffle relations for function field multizeta values, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2010, 2010(11): 1973–1980.
[122] Tsumura, H., Combinatorial relations for Euler–Zagier sums, *Acta Arith.*, 2004, 111(1): 27–42.
[123] Voevodsky, V., Triangulated categories of motives over a field, In: Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories, Ann. of Math. Stud., Vol. 143, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2000, 188–238.
[124] Wang, C. and Zhao, J.Q., Mordell–Tornheim Zeta aalues, their alternating version, and their finite analogs, 2024, arXiv:2401.03380.
[125] Wang, W.P. and Xu, C., Alternating multiple zeta values, and explicit formulas of some Euler–Apéry-type series, *European J. Combin.*, 2021, 93: Paper No. 103283, 25 pp.
[126] Wang, Z.X. and Guo, D.R., Special Functions, Teaneck, NJ: World Scientific Publishing Co., 1989.
[127] Xu, C., Explicit relations between multiple zeta values and related variants, *Adv. in Appl. Math.*, 2021, 130: Paper No. 102245, 31 pp.
[128] Xu, C., Yan, L. and Zhao, J.Q., Alternating multiple mixed values: Regularization, special values, parity, and dimension conjectures, *Indag. Math.* (*N.S.*), 2024, 35(6): 1212–1248.
[129] Xu, C. and Zhao, J.Q., Variants of multiple zeta values with even and odd summation indices, *Math. Z.*, 2022, 300(3): 3109–3142.
[130] Xu, C. and Zhao, J.Q., On some unramified families of motivic Euler sums, *J. Number Theory*, 2025, 272: 85–112.
[131] Xu, C. and Zhao, J.Q., Ramified and unramified motivic multiple t-, T- and S-values, 2023, arXiv:2310.16041.
[132] Xu, C. and Zhao, J.Q., Apéry-type series and colored multiple zeta values, *Adv. in Appl. Math.*, 2024, 153: Paper No. 102610, 46 pp.
[133] Xu, C. and Zhao, J.Q., Alternating multiple T-values: weighted sums, duality, and dimension conjecture, *Ramanujan J.*, 2024, 63(1): 13–54.
[134] Yu, H.Y., Guo, L. and Thibon, J.-Y., Weak quasi-symmetric functions, Rota–Baxter algebras and Hopf algebras, *Adv. Math.*, 2019, 344: 1–34.
[135] Yu, H.Y., Guo, L. and Zhao, J.Q., Rota–Baxter algebras and left weak composition quasi-symmetric functions, *Ramanujan J.*, 2017, 44(3): 567–596.
[136] Yuan, H.P. and Zhao, J.Q., Double shuffle relations of double zeta values and the double Eisenstein series at level N, *J. Lond. Math. Soc.* (*2*), 2015, 92(3): 520–546.

[137] Zagier, D., Values of zeta functions and their applications, In: First European Congress of Mathematics, Vol. II, Progr. Math., Vol. 120, Basel: Birkhäuser, 1994, 497–512.
[138] Zagier, D., Evaluation of the multiple zeta values $\zeta(2,\dots,2,3,2,\dots,2)$, *Ann. of Math.* (*2*), 2012, 175(2): 977–1000.
[139] Zhao, J.Q., Multiple q-zeta functions and multiple q-polylogarithms, *Ramanujan J.*, 2007, 14(2): 189–221.
[140] Zhao, J.Q., On a conjecture of Borwein, Bradley and Broadhurst, *J. Reine Angew. Math.*, 2010, 639: 223–233.
[141] Zhao, J.Q., Sum formula of multiple Hurwitz-zeta values, *Forum Math.*, 2015, 27(2): 929–936.
[142] Zhao, J.Q., Multiple Zeta Functions, Multiple Polylogarithms and Their Special Values, Series on Number Theory and Its Applications, Vol. 12, Hackensack, NJ: World Scientific Publishing Co., 2016.
[143] Zhao, J.Q., Uniform approach to double shuffle and duality relations of various q-analogs of multiple zeta values via Rota–Baxter algebras, In: Periods in Quantum Field Theory and Arithmetic, Springer Proc. Math. Stat., Vol. 314, Cham: Springer, 2020, 259–292.
[144] Zhao, J.Q., Weighted and restricted sum formulas of Euler sums, *Res. Number Theory*, 2024, 10(4): Paper No. 87, 40 pp.
[145] Zhao, J.Q., Finite multiple mixed values, 2024, arXiv:2402.08160.
[146] Zhao, J.Q., Finite and symmetric Euler sums and finite and symmetric (alternating) multiple T-values, 2024, arXiv:2403.18075.
[147] Zhou, Y.J., Sun's series via cyclotomic multiple zeta values, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 2023, 19: Paper No. 074, 20 pp.
[148] Zudilin, W., One of the numbers $\zeta(5),\zeta(7),\zeta(9),\zeta(11)$ is irrational, *Russian Math. Surveys*, 2001, 56(4): 774–776.
[149] Zudilin, W., Algebraic relations for multiple zeta values, *Russian Math. Surveys*, 2003, 58(1): 1–29.
[150] Zudilin, W., One of the odd zeta values from $\zeta(5)$ to $\zeta(25)$ is irrational: by elementary means, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 2018, 14: Paper No. 028, 8 pp.

Multiple Zeta Values and Related Theories

XU Ce[1], ZHAO Jianqiang[2]

(*1. School of Mathematics and Statistics, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui, 241002, P. R. China; 2. Department of Mathematics, The Bishop's School, La Jolla, CA 92037, USA*)

Abstract: In recent years, the multiple zeta values and related variants have been widely used in quantum physics, knot theory, number theory, non-commutative geometry, etc. Consequently, the research on the relevant problems has become a very active field in mathematics and physics. Many interesting and profound results have been achieved in this field so far, however, there are still many open problems and conjectures to be solved. This survey will systematically introduce the arithmetic, algebraic, combinatoric and geometric properties of these fascinating objects. In particular, we will expound on the connections between the multiple zeta values and some of their odd and even variants (such as multiple t-values, multiple T-values, multiple S-values, multiple M-values and their alternating versions) and their q-analogs and explain how the theory of motives and Rota–Baxter algebras are applied in this framework.

Keywords: multiple zeta value; odd and even variant; duality relation; double shuffle relation; q-analogues of multiple zeta value; motive theory; Rota–Baxter algebra